Probabilités

7/11 octobre 2024 - Semaine 4

Précédemment traité : Suites, Séries numériques, dénombrement.

À venir : v.a. et fonctions de répartition

Chapitre 3 | Généralités sur les probabilités

I Le triplet fondamental $(\Omega, \mathcal{T}, p)$

1 Rappel des probas finies

rappel de définition et exemples basiques. Limites et insuffisances du modèle fini.

2 Cas général : mesure de probabilité

2 . a Réunions et intersections "dénombrables"

Déf : Les opérateurs de réunion et d'intersection infinie ont sens suivant :

i ▪ L'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ correspond à l'événement *au moins un des événements A_n se produit.*

ii ▪ L'événement $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ correspond à l'événement *tous les événements A_n se produisent.*

Une réunion (resp. intersection) avec des indices dans $\mathbb{N}$ s'appelle une *réunion (resp. intersection) dénombrable*.

2 . b Notion de tribu

Déf : Soit Ω un ensemble fondamental et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{T}$ est une *tribu* (ou *σ-algèbre*) sur Ω si $\Omega \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire, $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable.

Déf : Pour tout ensemble Ω et toute tribu $\mathcal{T}$ sur Ω, on appelle le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ un *espace probabilisable* (ou *espace mesurable*).

2 . c La tribu des Boréliens

Déf : Si l'univers $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, il existe une tribu ayant les propriétés suivantes :
- elle contient l'ensemble $\mathcal{C} = \{[a, b] \mid a, b, \in \Omega\}$ de tous les intervalles fermés bornés dans Ω
- il n'existe pas de tribu plus petite contenant $\mathcal{C}$

On la note $\mathcal{B}(\Omega)$. On l'appelle *tribu des boréliens* sur Ω.

2 . d Espace probabilisé

Déf : Étant donné un ensemble Ω et une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω, on appelle *mesure de probabilité* p sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $p : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ telle que

i ▪ $\forall A \in \mathcal{T}$, on a $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$

ii ▪ $p(\emptyset) = 0\,; \quad p(\Omega) = 1$

iii ▪ *axiome de $\Sigma-$additivité :* Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{T}$, la série $\sum \big(p(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $p(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ est alors appelé *espace probabilisé*.

Déf : Rappel de vocabulaire : ensemble fondamental ou univers, épreuve, événement, événements contraires, incompatibles.

Déf : Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$,

i ▪ Si $A \in \mathcal{T}$ est tel que $A \neq \emptyset$ et $p(A) = 0$, on dit que A est *négligeable*.

ii ▪ Si $A \in \mathcal{T}$ est tel que $A \neq \Omega$ et $p(A) = 1$, on dit que A est *presque sûr*.

3 Cohérence avec les propriétés connues

Rappel des propriétés déjà vues en première année, mais généralisées aux espaces quelconques pour $p(A \cup B)$, $p(\bar{A})$. Si $A \subset B$, on a $p(A) \leqslant p(B)$ et $p(B \backslash A) = p(B) - p(A)$.

II Probabilités conditionnelles

1 Définition

Déf : Pour tout événement B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, vérifiant $p(B) \neq 0$ et $A \in \mathcal{T}$, on appelle *probabilité de A sachant B* et on note $p_B(A)$ la probabilité de l'événement A "sachant que B est déjà vérifié".

Ppé : *Pour tout événement B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, vérifiant $p(B) \neq 0$. L'application* $\begin{array}{rccc} p_B : & \mathcal{T} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} \end{array}$ *est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T}, p)$.*

Ppé : *Pour tout événement $A, B \in \mathcal{T}$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, on a*
$p(A\cap B) = p_B(A)p(B)$ *si $p(B) \neq 0$* *ou* $p(A\cap B) = p_A(B)p(A)$ *si $p(A) \neq 0$*

Convention de notation : si $p(A) = 0$, on note $p_A(B).P(A) = 0$.

2 Formules de Bayes

Thm : *Pour tout $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $p(A), p(B) \neq 0$, on a que* $p_B(A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{p_A(B)p(A)}{p(B)} = \dfrac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\bar{A}}(B)p(\overline{A})}$.

Exemples.

3 Formule des probabilités composées

Thm : Formule des probabilités composées.

Exemples.

III Indépendance

Ppé : *Si $p(A), p(B) \neq 0$, alors* $p_B(A) = p(A) \quad \Leftrightarrow \quad p(A\cap B) = p(A)p(B) \quad \Leftrightarrow \quad p_A(B) = p(B)$
Déf : Étant donné $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on dit que A et B sont indépendants si $p(A\cap B) = p(A)p(B)$.
Remarque : Toutes les propriétés vue en première année sur l'indépendance restent vraies en général.

Questions de cours :

À partir de maintenant, le colleur choisira de poser ou non une des questions de cours proposées.

- On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose A_n : "on obtient Pile pour la première fois au rang n". La famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet de l'univers.
  Conséquence sur la probabilité de ne jamais obtenir Pile.
- Formule des probabilités totales avec système quasi-complet.
- On lance une pièce de monnaie indéfiniement. Calculer la probabilité de l'événement
  B :« le deuxième Pile arrive juste après le premier. »
- On pose p_k la probabilité pour une famille d'avoir k enfants avec $p_0 = p_1 = a, \quad p_k = (1-2a)2^{-(k-1)}\ \forall k \geqslant 2$.
  La probabilité d'avoir une fille ou un garçon est la même. Quelle est dans ce cas la probabilité d'avoir exactement 2 garçons sur l'ensemble des enfants nés dans la famille ?

Remarque :
Les exercices peuvent également porter sur tout exercice de révision des variables aléatoires ***finies****, notamment les systèmes complets.*

Énoncé : *La colle commencera nécessairement par l'énoncé des cas de convergence + l'éventuelle somme totale d'un exemple fondamental de série, ou d'un DL usuel, ou d'une dérivéee usuelle, ou d'une primitive usuelle, ou d'une formule de trigo usuelle (au choix du colleur.) (-4 points si non connu)*

Les questions portant exclusivement sur les tribus sont HP dans les épreuves. Si le sujet est abordé dans un exercice, on se limitera donc à de petites questions très simples.