AL et densité

10 / 14 février 2025 - Semaine 18

Précédemment traité : Suites, Séries numériques, Dénombrement, Probabilités, équations différentielles (+autonomes), Polynômes, Espaces vectoriels, intégrales généralisées

À venir : $\mathbb{E}[X], V(X)$, convolution.

Chapitre 12 — Applications linéaires

tout le chapitre.

Chapitre 13 — Densité

I Densité

1 Définitions et généralités

Déf : On appelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une *densité* si f est une fonction positive, continue (sauf peut être en un nombre fini de points), d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Remarque : Si f est continue sauf en un nombre fini de points et si est nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$, l'étude de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est réduite à l'étude de $\int_a^b f$.

Thm : *Soit f une densité.*
La fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \end{array}$ *est une fonction de répartition.*

Déf : On dit que la variable aléatoire X *"est de densité f"* ou *"admet une densité f"* si f est une densité et que $F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ est une fonction de répartition de X.

Remarque : Il n'y a pas unicité de la densité possible pour une variable aléatoire.

Thm : *Pour toute densité f, il existe une variable aléatoire X telle que X soit une variable de densité f.*

Déf : On dit qu'une variable aléatoire X *"est à densité"* ou *"admet une densité"* s'il existe une densité f telle que X est de densité f.

2 Si je sais qu'une variable admet une densité

Ppé : *Si X est une variable aléatoire à densité, alors F_X est continue.*

Cor : *Une variable aléatoire finie ne peut jamais être à densité.*

Cor : *Si X est une va de densité f, alors, pour tous $a, b \in \bar{(\mathbb{R})}$, avec la notation $F(+\infty) = 1$ et $F(-\infty) = 0$:*
$$\int_a^b f(t)\,dt = F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b).$$

Prop : *On se donne X une variable aléatoire de densité f, alors, en tout point x où f est continue, F_X est $\mathcal{C}^1$ en x et $F_X'(x) = f(x)$.*

Cor : *Soit X une variable aléatoire de densité f et $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ $(a<b)$. Alors, $Supp(X) \subset [a, b]$ $\iff$ $f = 0$ en tout point de continuité dans $\mathbb{R} \backslash [a, b]$ (on écrit $a \leqslant X \leqslant b$p.s.)*

3 Si je veux montrer qu'une variable admet une densité

Prop : *On se donne X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X. Si F_X est* ***continue sur tout*** *$\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points $a_1, \dots a_n$, alors X est une va à densité de densité f telle que $f(x) = F_X'(x) \quad \forall x \neq a_1, \dots, a_n$ (les valeurs de $f(a_1), \dots, f(a_n) \geqslant 0$ pouvant être choisies arbitrairement.)*

Déf : Si une variable aléatoire X est à densité, *donner la loi de X* signifie "prouver qu'elle admet une densité et la donner."

Les **questions de cours** (optionnelles au choix du colleur) porteront sur les questions suivantes :

- Montrer que $L_0 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \text{primitive de } P \text{ qui s'annule an } 0 \end{array}$ est injective mais non bijective.

- Montrer que $L_0 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & \text{primitive de } P \text{ qui s'annule an } 0 \end{array}$ est injective mais n'est pas un ispomorphisme

  en étudiant l'image de la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. (technique de l'image d'une famille libre/base)

- Soit X une variable aléatoire de densité $f : t \mapsto \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Déterminer la fonction de répartition de X.

- Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X définie par $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \ln t & \text{si } t \in [1, e[\\ 1 & \text{si } t > e \end{cases}$.

  Dire si X est à densité et si c'est le cas, la déterminer.

La colle commencera par :

- l'énoncé de l'un des exemples de référence d'intégrale généralisée, ou un DL usuel, ou une primitive usuelle, ou une dérivée usuelle. (2 points)

- l'énoncé de l'une des questions de cours de l'oral du concours parmi les numéros : de 41 à 45 ou 62 à 73. (2 points)

Pour remarque, les exercices sur le passage fonciotn de répartiton / densité