Applications linéaires

du 3 au 7 février 2025 - Semaine 17

Précédemment traité : Suites, Séries numériques, Dénombrement, Probabilités, équations différentielles (+autonomes), Polynômes, Espaces vectoriels, intégrales généralisées

À venir : Densité

Chapitre 12

Applications linéaires

I Généralités

1 Notion d'application linéaire

Déf : Définition d'une application linéaire et théorème de caractérisation.

Prop : *Si $L : E \to F$ est une application linéaire, alors $L(0_E) = 0_F$*

Déf : Vocabulaire endomorphisme, isomorphisme (automorphisme)

2 Opérations sur les applications linéaires

Prop : *$\mathcal{L}(E, F)$ est $\mathbb{K}$-un espace vectoriel.*

Prop : *Toute composition d'AL est une AL*

3 Lien entre matrices et applications linéaires en dimension finie

3 . a Matrice d'une application linéaire en dimension finie

Déf : Soient E, F deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_m)$. Pour une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle *matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$* la matrice $M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) =$

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \ldots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & \ldots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \ldots & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Prop : *$M_{\mathcal{B}_F}\big(f(u)\big) = M(f)_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}\ M_{\mathcal{B}_E}(u)$.*

Prop : *Rapport entre les différentes opérations sur les applications linéaires et les matrices dans les bases (combinaison linéaire, composition, inverse)*

3 . b Changement de base

Thm : *$M(f)_{\mathcal{G}',\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{G}'}(\mathcal{G})\ M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(f)\ M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$*

Cor : *En particulier, pour le cas d'un endomorphisme $M(f)_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\ M_{\mathcal{B}}(f)\ M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.*

Déf : matrices *semblables.*

II Image, noyau, injectivité, surjectivité

1 Image (d'un sev ou de E)

Ppé : *Si $H = Vect(v_1, \ldots, v_n)$ alors $f(H) = Vect\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big)$*

Prop : *Si H un sev E, alors $f(H)$ est un sev de F.*

Déf : On appelle *image* de f et on note $\mathrm{Im} f$ l'espace vectoriel $f(E)$.

Cor : *Si E est de dimension finie, alors $Im\, f$ l'est aussi, $Im(f) = Vect\big(\text{“}f(base)\text{”}\big)$, et $\dim Im\, f \leqslant \dim E$*

Déf : Si $\mathrm{Im}\, f$ est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle *rang de f* et on note $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$.

2 Noyau

Déf : On appelle *noyau* de f et on note $\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.

Ppé : $0_E \in \ker f$.

Prop : *$\ker f$ est un sev de E.*

3 Injection, surjection

Thm : *f est surjective si et seulement si $F = Im f$. f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.*

Thm : *f est surjective si et seulement si $F \subset Im f$ / f est injective si et seulement si $\ker f \subset \{0_E\}$.*

III Applications linéaires en dimension finie

Dans cette section, on se donne E de dimension finie.

1 Rang et matrices

Thm : *Si F est de dimension finie, alors, pour toutes bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, on a $rg\, f = rg\,(M(f)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})$.*

2 Image d'une base et injectivité

Thm : *Les conditions suivantes sont équivalentes : f est injective ; l'image de toute base de E est une base de $Im\ f$; l'image d'une base de E est une base de $Im\ f$; $\dim E = rg\, f$*

Cor : *Les conditions suivantes sont équivalentes : f est un isomorphisme ; l'image de toute base de E est une base de F . l'image d'une base de E est une base de F.*

Cor : *Si f est un isomorphisme, alors toute matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(f)$ est carrée.*

Cor : *f est un isomorphisme ssi $M_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(f)$ est inversible.*

3 Théorème du rang et conséquences

Thm : (du rang) $\dim E = \dim ker\, f + rg\, f$

Thm : *Soient E, F deux espaces vectoriels* **de même dimension**. *On a f injective $\iff$ f bijective $\iff$ f surjective*

Les **questions de cours** (optionnelles au choix du colleur) porteront sur les questions suivantes :

- Montrer que $L_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \text{primitive de } P \text{ qui s'annule an } 0 \end{array}$ est injective mais non bijective.
- Montrer que $L_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & \text{primitive de } P \text{ qui s'annule an } 0 \end{array}$ est injective mais n'est pas un ispomorphisme
  en étudiant l'image de la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. (technique de l'image d'une famille libre/base)
- Supposons que $f : E \to F$ soit une application linéaire avec E, F de dimension finie identique.
  Montrer que f injective $\Leftrightarrow$ f bijective $\Leftrightarrow$ f surjective.

La colle commencera par :

- l'énoncé de la loi, espérance et variance d'une des variables aléatoires parmi les exemples fondamenteux du cours parmi les variables discrètes (loi uniforme, binomiale, géométrique, Poisson) (sauf uniforme où on ne donnera pas la variance, qui est HP.) Cette question sera notée sur 2 points maximum.

- l'énoncé de l'une des questions de cours de l'oral du concours, au choix du colleur, parmi les numéros : de 41 à 45 ou 62 à 73. Cette question sera notée sur 2 points.