Couples, équations autonomes

20 / 24 janvier 2025 - Semaine 15

Précédemment traité : Suites, Séries numériques, Dénombrement, Probabilités, équations différentielles, Polynômes, Espaces vectoriels, intégrales généralisées, variables discrètes

À venir : Applications linéaires

Chapitre 10

Couples de variables aléatoires discrètes

I Loi

II Corrélation

1 Espérances

Thm : (de transfert) *Soient X, Y deux variables finies de support indexé resp par $[\![0, N]\!]$ et $[\![0, M]\!]$, D un sous ensemble de $\mathbb{R}$ contenant $[\![0, N]\!] \times [\![0, M]\!]$, $g : Supp(X, Y) \to \mathbb{R}$ une fonction, alors*
$$E(g(X,Y)) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} g(x_i, y_j)P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=0}^{M}\sum_{i=0}^{N} g(x_i, y_j)P(X = x_i, Y = y_j)$$
(au programme seulement pour les variables finies.)

2 Covariance

Déf : Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si la variable aléatoire $(X - E(X))(Y - E(Y))$ admet une espérance, on appelle *covariance du couple (X, Y)* la valeur $Cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]$.

Thm : (Formule de Huyghens-Koenig) *Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$ existent, alors le couple (X, Y) admet une covariance qui peut être calculée grâce à la formule $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.*

Ppé : *Soit (X, Y) un couple de v.a.discrètes. Si les variables X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors l'espérance $\mathbb{E}[XY]$ existe.*

Cor : *Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si les variables X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors le couple (X, Y) admet une covariance et $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.*

Ppé : *Soient X, Y des v.a.d. définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a $Cov(X, X) = V(X)$; $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.*

Ppé : (bilinéarité de la covariance)

Thm : *Soient X, Y des v.a.d. définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$.*

Cor : *Soient X, Y des v.a.d. définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a $|Cov(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.*

3 Coefficient de corrélation linéaire

Déf : Soient X, Y des v.a.d. sur un même espace probabilisé, admettant chacune un moment d'ordre 2 **non nul**. On appelle *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y la valeur $r(X, Y) = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Ppé : *Soient X, Y des v.a.d. sur un même espace probabilisé ; admettant chacune un moment d'ordre 2* **non nul**, *alors $-1 \leqslant r(X, Y) \leqslant 1$.*

Ppé : *Soient X, Y des v.a.d. sur un même espace probabilisé, admettant chacune un moment d'ordre 2* **non nul**, *alors $|r(X, Y)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ il existe $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $P(Y = aX + b) = 1$*

4 Indépendance

Déf : Étant donné un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, on dit que X et Y sont *indépendantes* si $p\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = p(X = x)\,p(Y = y) \quad \forall x \in Supp(X), y \in Supp(Y)$.

Ppé : *X et Y sont indépendantes ssi l'une des assertions suivantes est vérifiée*
- *$X_{/Y=y}$ a même loi que X pour tout $y \in Supp(Y)$ de probabilité non nulle.*
- *la loi de $X_{/Y=y}$ est indépendante de y.*

Lemme : *Soit (X, Y) un couple de v.a.d. indépendantes, alors, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $X - a$ et $Y - b$ sont indépendantes. Pour toutes fonctions réelles g, h, les v.a.d. $g(X)$ et $h(Y)$ sont indépendantes.*

Thm : *Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ existent et si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[XY]$ existe et $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.*

Cor : *Soit (X,Y) un couple de v.a.d. Si $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ existent Si X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X,Y)$ existe et $Cov(X,Y) = 0$*

Cor : *Soit (X,Y) un couple de v.a.d. Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y)$ existe et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.*

Cor : *Soient X, Y des v.a.d. sur un même espace probabilisé, admettant chacune un moment d'ordre 2* **non nul**, **indépendantes**, *alors $r(X,Y) = 0$.*

III Convolution

1 Généralités

Déf : Soit (X,Y) un couple de v.a.d. de loi respectives $\mathcal{L}(X)$ et $\mathcal{L}(Y)$. On appelle *convolution* des lois de X et Y on note $\mathcal{L}(X) \star \mathcal{L}(Y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\mathcal{L}(X) \star \mathcal{L}(Y)(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i)P(Y = x - x_i)$ où la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i)P(Y = x - x_i)$ est convergente

Thm : *Soit (X,Y) un couple de v.a.d.* **indépendantes**, *alors la loi de $X+Y$ est définie par $\mathcal{L}(X) \star \mathcal{L}(Y)$.*

2 Exemple

Thm : *Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0;1]$. Alors* $\quad \mathcal{B}(n,p) \star \mathcal{B}(m,p) = \mathcal{B}(n+m,p)$.

Thm : *Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0;1]$. Si X et Y sont deux v.a.d. indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$*

Thm : *Soient $\lambda, \mu > 0$. Alors* $\quad \mathcal{P}(\lambda) \star \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Cor : *Soient $\lambda, \mu > 0$. Si X et Y sont deux v.a.d. indépedantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ alors $X+Y \hookrightarrow P(\lambda+\mu)$*

Chapitre 11

Équations différentielles autonomes d'ordre 1

I Définition et quelques propriétés

Déf : Une *équation différentielle scalaire autonome d'ordre 1* est une équation différentielle du type : $y' = F(y)$ avec y l'inconnue qui est une fonction dérivable et F une fonction continue. On appelle (E) cette équation dans la suite du cours. Une solution de cette équation est une fonction y $\mathcal{C}^1$ sur un **intervalle** $I \subset \mathbb{R}$ telle que : $\forall t \in I, \quad y'(t) = F(y(t))$.

Remarque : Deux courbes de solutions qui passent par une même ordonnée ont des tangentes parallèles. Ceci permet de conjecturer instinctivement que deux courbes de solutions ne se recoupent jamais.

Déf : Si a est un réel tel que $F(a) = 0$ alors $y : t \mapsto a$ est une solution de (E). On appelle *équilibre* ou *état stationnaire* les solutions constantes de (E).

Prop : *Soit $k \in \mathbb{R}$. On note $J = \{u - k \mid u \in I\}$. Alors : $\forall t \in J$, on a $t + k \in I$, et si y est une solution de l'équation (E) sur I, alors $\varphi : t \in J \mapsto y(t+k)$ avec k réel est solution de (E) sur J.*

Commentaires : Graphiquement, ceci signifie que toute translation horizontale (à gauche ou a droite) d'une courbe est encore la courbe d'une solution

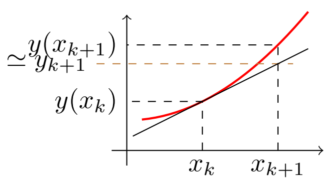
exemples de graphiques

II Résolutions graphiques : méthode d'Euler

On rappelle (cf TP5 d'informatique) que l'on peut obtenir graphiquement des approximations de courbes de solutions grâce à la méthode d'Euler, que vous devez connaître *(mais dont l'énoncé est censé être rappelé en cas d'utilisation.)*

Thm : (Méthode d'Euler) *Soient y une solution de (E) sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ et n un entier naturel non nul. Soit ensuite $(y_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ la suite finie définie par :* $\begin{cases} y_0 = y(\alpha) \\ h = \frac{\beta - \alpha}{n} \\ y_{k+1} = y_k + hF(y_k) \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!] \end{cases}$ *Alors, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, si n est assez grand, on a : $y_k \simeq y(x_k)$.*

Graphiquement :



III Exemples de résolutions en dynamique des populations

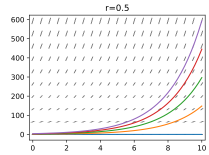
$N(t)$: fonction dérivable et qui désigne le nombre d'individus dans une population donnée, à l'instant t.

1 Modèle de Malthus

Dans le modèle, on estime que $N'(t) = rN(t) \quad \forall t \geq 0$.

On montre que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $\boxed{N : t \geq 0 \mapsto N(0)e^{rt}}$.

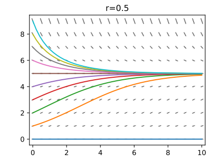
explications + Exemple de graphique :



2 Modèle Logistique

Dans ce modèle, on estime que $N'(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t) \quad \forall t \geq 0$

explications + Exemple de graphique :



On montre que :

1. $N : 0 \mapsto 0$ est un état stationnaire du modèle.

2. Si N ne s'annule pas, avec $z(t) = \frac{1}{N(t)}$ on a $N'(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t) \quad \Leftrightarrow \quad z' = -rz + \frac{r}{K}$

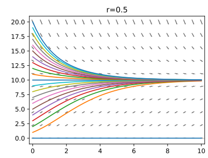
3. les solutions du modèle logistique sont : $\boxed{N : t \geq 0 \mapsto \dfrac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right)e^{-rt}}}$

4. les états stationnaires sont 0 et K.

3 Le modèle de Gompertz

Dans ce modèle, on suppose que $N'(t) = r\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)N(t) \quad \forall t \geq 0$ Pour tout N application qui ne s'annule pas.

explications + Exemple de graphique :



On montre que

1. Si $t \geq 0$, $z(t) = \ln(N(t))$ l'équation de Gompertz équivaut à $z' + rz = c$ avec c une constante à déterminer.

2. $z : t \geq 0 \mapsto \lambda e^{-rt} + \ln K$

3. les solutions du modèle logistique sont : $\boxed{N : t \geq 0 \mapsto Ke^{-\ln\frac{K}{N(0)}e^{-rt}}}$

4. état stationnaire : K.

Les **questions de cours** (si elles sont posées) porteront sur les questions suivantes :

- On pose X et Y les premières et deuxième apparition de 6 dans une infinité de lancers.
  Loi marginale de Y et loi de $Y/_{X=x}$. *(on pourra admettre la loi conjointe.)*
- On tire une boule au hasard dans une urne contenant n boules identiques numérotées de 1 à n.
  On note X le résultat puis Y le nombre de succès en tirant X fois indépendamment sur une cible (proba de réussite p.)
  Expliciter les lois de X et $Y_{/(X=i)}$ puis montrer que $\mathbb{E}[Y] = \frac{(n+1)}{2}$, $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{p(n+1)}{6}(3 + 2pn - 2p))$
  en utilisant le théorème de transfert sur les couples puis en déduire $V(Y)$.
- Montrer que les solutions du modèle de Gompertz $N'(t) = r\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)N(t) \quad \forall t \geq 0$
  sont $N : t \geq 0 \mapsto Ke^{-\ln\frac{K}{N(0)}e^{-rt}}$ en posant $z(t) = \ln(N(t))$
  avec N solution équivalent à $z' + rz = r\ln K$. Déterminer les états stationnaires.
- Esquisser des graphiques correspondant aux trois modèles, avec :
  pour le modèle de malthus : 1 condition initiale au moins
  pour le modèle logistique et celui de Gompertz : au moins 3 conditions initiales,
  correspondant respectivement à une situation de croissance/décroissance/stationnaire non nulle.
  et pour chacun de ces cas, on expliquera le rapport entre le sens de variation plus ou moins rapide de N,
  (la condition initiale plus ou moins éloignée de K pour logistoque et Gompertz) et
  la formule du modèle (en particulier le rapport avec N'.)
  (les explications figurent pour une partie dans le cours et pour les autres, ont été données à l'oral...)

Commentaires : Concernant les équations différentielles autonomes, dans le programme est stipulé que : "Aucune théorie générale ne doit être faite. Toute étude devra être entièrement guidée".

On rappelle que tout sujet de colle peut également contenir si besoin des questions de programmation en Python.

La colle commencera par :

- l'énoncé de la loi, espérance et variance d'une des variables aléatoires parmi les exemples fondamenteux du cours parmi les variables discrètes (loi uniforme, binomiale, géométrique, Poisson) (sauf uniforme où on ne donnera pas la variance, qui est HP.) Cette question sera notée sur 2 points maximum.

- l'énoncé de l'une des questions de cours de l'oral du concours, au choix du colleur, parmi les numéros : de 31 à 40 ou 58 à 61. Cette question sera notée sur 2 points.