

Précédemment traité : Suites, Séries numériques, Dénombrement, Probabilités, Polynômes, Équa. diff.

À venir : équa. diff. autonomes

Chapitre 6

Espaces vectoriels

Tout le chapitre mais ciblé sur les coordonnées.

Chapitre 7-0

DL, Limites, Continuité, Dérivabilité, Intégration

Chapitre 7

Intégrales généralisées

I Rappels de notations, vocabulaire et d'intégration de 1^{ère} année

II Convergence d'une intégrale (impropre ou) généralisée

1 Définition d'une intégrale généralisée

Déf : Convergence ou divergence de $\int_a^b f(t) dt$, où $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$$\text{Définition de } \int_a^b f(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t) dt.$$

déduction de la définition de $\int_a^b f(t) dt$, où $f :]a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $]a, b]$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ et généralisation à des réunions d'intervalles.

Théorème (Relation de Chasles) :

Si $f \in \mathcal{C}(I)$ pour $I =]\alpha, b[$, alors, pour tout $a, c \in I$, $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ ont même nature. De plus, en cas de convergence, la relation de Chasles généralisée est vérifiée : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$

2 Intégrales faussement impropre

Ppé : Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ où $a, b \in \mathbb{R}$ (intervalle borné!) et que f est prolongeable par continuité en b , alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente et $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt$ où $\tilde{f}$ est la prolongée de f en b

Déf : Dans ce cas précédent, on parle d'une intégrale *faussement impropre* (en b).

III Manipulation des intégrales impropres

1 Linéarité

Thm : Linéarité de l'intégrale en cas de convergence "de chaque morceau".

2 IPP

Théorème (Ipp d'une intégrale impropre) :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$, avec $a < b$. Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b[$ telles que $\lim_{x \rightarrow b, x < b} u(x)v(x)$ existe et est finie. On a alors que $\int_a^b u'v$ est de même nature que $\int_a^b uv'$.

S'il y a convergence, on a $\int_a^b u'v = [uv]_a^{\rightarrow b} - \int_a^b uv'$ où $[uv]_a^{\rightarrow b}$ désigne la quantité $[u(t)v(t)]_a^{\rightarrow b} = \lim_{x \rightarrow b, x < b} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

possibilité d'appliquer une IPP "classique" en "revenant au x " et en passant à la limite à la fin. Méthode d'ailleurs obligatoire en cas de divergence du crochet.

3 Changement de variable

Théorème Changement de variables dans une intégrale impropre :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, I un intervalle, ainsi que f et φ deux fonctions telles que :

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soit continue
- $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone d'inverse notée ψ

Alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\psi(x))\psi'(x) dx$ sont de même nature, avec, en cas de convergence,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(x))\psi'(x) dx$$

où α et β sont définis par

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) \quad ; \quad \beta := \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x)$$

Cor : Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f \in \mathcal{C}([-a; a])$. Si f est paire ou impaire, la nature de $\int_0^a$ est la même que celle de $\int_{-a}^0$.

Cor : Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f \in \mathcal{C}([-a; a])$ telle que $\int_0^a f(t) dt$ ou $\int_{-a}^0 f(t) dt$ converge.

- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt$ converge et $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$
- Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt$ converge et $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$

IV Fonctions positives et convergence absolue

Théorème de positivité : L'intégrale à bornes croissantes d'une fonction positive intégrable sur $[a; b]$ est positive.

Cor : Comparaison d'intégrales impropres

Thm : $\int_a^b f(t) dt = 0$ implique f est nulle sur $[a; b]$.

Prop : Si f positive, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow F : x \in [a; b] \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Thm : Si $0 \leq f \leq g$ Alors

- 1- $\int_a^b g(t) dt$ cv $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ cv et $0 \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$
- 2- $\int_a^b f(t) dt$ dv $\Rightarrow \int_a^b g(t) dt$ dv

Thm : Convergence absolue

V Exemples fondamentaux

Thm : $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ cv en $+\infty$ ssi $\lambda > 0$. Dans ce cas, on a $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$

Thm : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-\lambda t} dt$ cv ssi $\lambda > 0$. Si $\lambda > 0$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$

Thm : $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

I Généralités

1 Définition

Déf : On appelle *variable aléatoire réelle discrète* toute variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\text{Supp}(X)$ soit indexé par un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

2 Loi d'une v.a.d.

Déf : On appelle *loi de la v.a.d.* X l'ensemble noté $\mathcal{L}(X)$ constitué de $\text{Supp}(X)$ et de l'ensemble des $P(X = k)$ avec $k \in \text{Supp}(X)$.

Prop : Etant donné un sous-ensemble I de $\mathbb{N}$, pour toute suite $(p_i)_{i \in I}$ et toute suite $(x_i)_{i \in I}$ de réels, telles que

$$\begin{cases} p_i \geq 0 & \forall i \in I \\ \sum_{i \in I} p_i = 1 \end{cases} \quad \text{Alors il existe une variable aléatoire } X \text{ telle que } \begin{cases} \text{Supp}(X) = \{x_i \mid i \in I\} \\ p(X = x_i) = p_i \end{cases} \quad \forall i \in I$$

3 Fonction de répartition

rappel de définition

Ppé : Soit X une variable aléatoire discrète. Alors sa fonction de répartition F_X est constante sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$ tels que $\text{Supp}(X) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec $x_i < x_{i+1}$ pour tout i .

Ppé : Soit F une fonction de répartition d'une variable X , constante entre ses points de discontinuité notés D . Alors $\text{Supp}(X) = D$ et X est une variable discrète.

Cor : Deux v.a.d. ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.

Il faut savoir passer d'une loi à une fonction de répartition et réciproquement.

II Exemples fondamentaux

1 Rappels de Probabilités finies

Loi de probabilités, modélisation, exemples de fonctions de répartition et de diagrammes de probabilités pour les lois "uniforme", "de Bernoulli", "binomiale".

2 Loi géométrique

Déf : Pour tout $p \in]0; 1[$, on dit que X suit une loi *loi géométrique* (sur $\mathbb{N}^*$) de paramètre p si $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

modélisation : apparition du premier succès. exemples ; diagrammes de probabilités et fonction de répartition.

Ppé : Soit $p \in]0; 1[$. Fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) : F(t) = \begin{cases} 1 - (1 - p)^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Déf : Soit $p \in]0; 1[$. on dit que X suit une loi *loi géométrique* (sur $\mathbb{N}$) de paramètre p si $P(X = k) = (1 - p)^k p \quad \forall k \in \mathbb{N}$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$

modélisation : nombre d'échecs.

3 Loi de Poisson

Déf : Soit $\lambda \in]0; +\infty[$. On dit que X suit une *loi de Poisson* de paramètre λ si $p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Diagrammes de probabilités, fonction de répartition.

III Espérance et variance

1 Espérance

Déf : On se donne une v.a.d. X de support dans $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ où les x_k sont 2 à 2 distincts. Si la série $(\sum p(X = x_k) x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge absolument, on appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}[X]$ la valeur $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X = x_k) x_k$ (et cette valeur ne dépend pas de l'ordre des x_k).

Théorème de transfert :

Soient

- i ■ $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une v.a.d. de support dans $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, où les x_k sont deux à deux distincts ou de probabilité nulle.
- ii ■ I un intervalle (ou réunion finie d'intervalles) contenant $\text{Supp}(X)$
- iii ■ $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

Alors, si la série $\sum g(x_k) p(X = x_k)$ est absolument convergente, on a $\mathbb{E}[g \circ X] = \sum_{k=0}^{+\infty} g(x_k) p(X = x_k)$.

diverses propriétés élémentaires sur les comparaisons d'espérances, positivité, etc...

Déf : On dit qu'une v.a.d. X est *centrée* si son espérance existe et $E(X) = 0$.

2 Moments

Déf : Moment d'ordre r .

Ppé : Soit X une v.a.d. telle que $\text{Supp}(X) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_k^r p(X = x_k)$ converge absolument,

le moment d'ordre r existe et $\mathbb{E}[X^r] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_k^r p(X = x_k)$

Thm : Si le moment d'ordre r de X existe, alors le moment d'ordre $r' \in \{1, \dots, r\}$ existe.

Déf : moment centré d'ordre r

3 Variance

Déf : variance et écart-type dont l'existence est soumis à celle du moment d'ordre 2.

Déf : Une v.a.d. X est dite *réduite* si sa variance existe et $V(X) = 1$.

Vocabulaire : Les v.a.d. $X - \mathbb{E}[X]$ et $\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$ sont appelées resp. variable *centrée* et *centrée réduite* de X .

Théorème de König-Huyghens : Soit X une v.a.d. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, on a $V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Ppé : Soient X une v.a.d. admettant un moment d'ordre 2, et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a X est constante (en loi) si et seulement si $V(X) = 0$. / $V(aX) = a^2 V(X)$ / $V(X + b) = V(X)$.

4 Exemples fondamentaux

- | | |
|--|--|
| ■ $X \rightsquigarrow U_{\{a, a+1, \dots, b\}} : E(X) = \frac{b+a}{2} \quad V(X) \text{ (HP)}$ | ■ $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p) : E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{q}{p^2} \quad \text{où } q = 1 - p$ |
| ■ $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p) : E(X) = np \quad V(X) = npq.$ | ■ $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) : E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda$ |

Les **questions de cours** (si elles sont posées) porteront sur les questions suivantes :

- Théorème de décomposition dans une base (existence et unicité de la décomposition)
- Déterminer les coordonnées du polynôme $X^2 - 3X + 4$ dans la base $\mathcal{B}' = (1, X - 1, (X - 1)(X - 2))$ de $\mathbb{R}_2[X]$ "de trois façons" différentes. (à vue, par identification des coefficients et avec la méthode matricielle.)
- Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt$ par changement de variable.
- Espérance et variance de la loi géométrique.

La colle commencera par l'énoncé de l'une des questions de cours de l'oral du concours, au choix du colleur, parmi les numéros : de 21 à 30 ou 53 à 57. Cette question sera notée sur 2 points.