eV - Révisions d'analyse

du 2 au 6 décembre 2024 - Semaine 10

Précédemment traité : Suites, Séries numériques, Dénombrement, probabilités, polynômes, Equa. Diff

À venir : intégrales impropres

Chapitre 5 — Espaces vectoriels

I Généralités

II Famille génératrice, famille libre et base

III Dimension, rang (et recherche de base)

1 Dimension

2 Rang d'une famille

3 Théorème de la base incomplète

Thm : (de la base incomplète :) *Supposons que E est un $\mathbb{K}$-ev dans il existe une famille génératrice finie. Alors, toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.*

exemples

IV Coordonnées

1 Unicité de la décomposition dans une base

Thm : (de décomposition dans une base) *Soit E un espace vectoriel. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'éléments de E est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur $u \in E$, il existe une unique décomposition $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.*

Exemple et rapport entre l'unicité et la liberté, l'existence et le caractère générateur par contre exemple.

2 Notion de coordonnées

Notation : *Pour une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, écriture $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$ ou $u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$*

Déf : On appelle $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les **coordonnées** de $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et on note

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

le vecteur associé, nommé *vecteur coordonnées* de u dans $\mathcal{B}$

Notation : *Notation en ligne possible* **hors calculs** $M_{\mathcal{B}}(u) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Remarque : Sauf si $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ base, on a donc $M_{\mathcal{B}}(u) \neq u$. *exemples*

3 Changement de base

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E

Déf : On pose la matrice des coordonnées de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \ldots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \end{array}$

qu'on appelle *matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*.

Diverses Techniques de changement de base passées en revue :
- à vue ;
- par emplacement des e'_i en fonction des e_i (ou le contraire si c'est possible, au cas échéant) ;
- par résolutions de systèmes
- par formule de changement de base :

Thm : (Formule de changement de base) $M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')M_{\mathcal{B}'}(u)$.
en sachant que :

Prop : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, avec $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ trois bases de E. Alors $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})M_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{D})$*

Cor : *Étant donné un espace vectoriel E et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice de passage $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est inversible et on a $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1} = M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.*

Traduction de la liberté d'une famille $\mathcal{F}$ en terme matricielle dans une base $\mathcal{B}$ si la dimension est finie :
$\mathcal{F}$ est libre ssi $rg(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = card(\mathcal{F})$.

Chapitre 6-0

DL, Limites, Continuité, Dérivabilité, Intégration

Le chapitre consiste en des révisions de première année. (Se référer au cours de BCPST1.)

I Limites

Limites et opérations sur les limites. Limite à droite, à gauche. Inégalités. Composition de limites par une fonction. Équivalents, négligeabilité. Croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes. Limite monotone. Développements limités, asymptotes, position d'une courbe par rapport à son asymptote.

II Continuité

Continuité en un point, continuité sur un intervalle. Prolongement par continuité.
Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection (Toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.)
Représentation graphique de la fonction arctan. Parité de arctan.

III Dérivation

Opérations sur les dérivées, fonction réciproque. (Applications à la fonction arctan. Les dérivées des fonctions arcsin et arccos ne sont pas à connaître au programme.) Thm de Rolle, accroissements finis. Caractérisation de la monotonie par le signe de la dérivée. Recherche d'extrema.
Dérivée $n^{\text{ème}}$. Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

IV Intégration sur un segment

Définition de l'intégrale par primitive. Interprétation graphique. Propriétés élémentaires (relation de Chasles, positivité, linéarité, encadrement de l'intégrale). Sommes de Riemann. Intégration par parties, changement de variables

---

Les **questions de cours** (optionnelles : au choix du colleur) porteront sur les questions suivantes :

- La famille $\{f : x \mapsto x, g : x \mapsto e^{-x}, h : x \mapsto 1 + \cos x\}$ est une famille libre.
- Toute famille de polynômes de degrés 2 à 2 distincts est libre.
- $\text{Vect}\,(X, 1+X) = \mathbb{R}_1[X]$ avec méthode de l'égalité des dimensions.
- Théorème de décomposition dans une base (existence et unicité de la décomposition)
- Déterminer les coordonnées du polynôme $X^2 - 3X + 4$ dans la base $\mathcal{B}' = \big(1, X-1, (X-1)(X-2)\big)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ "de trois façons" différentes. (à vue, par identification des coefficients et avec la méthode matricielle.)

La colle commencera par l'énoncé de l'une des questions de cours de l'oral du concours, au choix du colleur, parmi les numéros : de 11 à 20 ou 46 à 52. Cette question sera notée sur 2 points.