

Fonction de répartition

EXERCICE 1: – *Raisonner – Calculer* –

On dispose d'une cible de rayon R découpée en quatre zones délimitées par trois cercles concentriques de rayon $\frac{R}{4}$, $\frac{2R}{4}$ et $\frac{3R}{4}$. Les zones ainsi délimitées sont numérotées de 1 à 4 en partant du centre.

On choisit au hasard un point sur cette cible et on appelle X le numéro de la cible sur laquelle on tombe. On admet (pour l'instant) que la probabilité de tomber sur un disque est proportionnelle à sa surface.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable X .
2. En déduire la loi de probabilité de X .

Rappels de variables aléatoires finies

EXERCICE 2: – *Calculer* –

Soit X une variable aléatoire suivant la loi suivante uniforme sur $\{-1, 1\}$.

1. Calculer $P(|X| = 1)$ et $P(X^2 - 3X + 2 = 0)$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. On pose $Y = \frac{X+1}{2}$. Déterminer $\mathbb{E}[Y]$ et $V(Y)$.
4. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{X}{2+X}\right]$.

EXERCICE 3: – *Calculer* – Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Déterminer les moments d'ordre 1, 2 et 3 de X .**EXERCICE 4:** – *Raisonner* – Soient $a \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

$$P(X = k) = ck^b(a - k)^b, \quad \forall k \in \{1, \dots, a - 1\}$$

$$\text{où } c = \left(\sum_{i=1}^{a-1} i^b(a - i)^b \right)^{-1}.$$

1. Montrer que X et $a - X$ ont même loi.
2. En déduire $\mathbb{E}[X]$.

EXERCICE 5: – *Raisonner – Calculer* –

☆

On tire simultanément k jetons d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq p$). Soit X le plus grand numéro obtenu.

1. Déterminer la loi de X .
2. Justifier que $\sum_{j=k}^n P(X = j) = 1$ et en déduire $\sum_{j=p}^n \binom{j}{p}$ pour tous les entiers p, n .
3. Calculer les moments d'ordre 1 et 2 de X .

EXERCICE 6: – *Raisonner – Calculer* –

On pose Y une variable aléatoire telle que Y vaut 3, 4, 5, ou 6.

1. Déterminer sa loi sachant que

$$P(Y < 5) = \frac{1}{3} \quad P(Y > 5) = \frac{1}{2} \quad P(Y = 3) = P(Y = 4)$$

2. Déterminer sa fonction de répartition.
3. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

EXERCICE 7: – *Calculer* – On lance un dé et on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi et l'espérance de $Y = (X - 3)^2$ et de $Z = \frac{1}{X}$.**EXERCICE 8:** – *Raisonner – Calculer* –

☆

1. – *Raisonner* – Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une v.a. telle que $X(\Omega) \subset \{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k).$$

2. Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs. Lorsque le joueur commence un niveau (ce qui suppose qu'il ait réussi les niveaux précédents) la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.
 - a) Déterminer $\text{Supp}(X)$ et calculer, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X \geq k)$.
 - b) En déduire $\mathbb{E}[X]$.

EXERCICE 9: – *Modéliser* –

On se donne une urne avec a boules rouges et b boules vertes. On effectue un tirage de n boules sans remise dans cette urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Montrer qu'on a, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(X = k) = \frac{\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

où on utilise la convention $\binom{j}{i} = 0$ si $i > j$.

2. On numérote les boules rouges de 1 à a . On note alors la variable

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on a tiré la boule } k \text{ parmi les } n \text{ boules tirées.} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- a) Justifier que $X = \sum_{i=1}^a X_i$.
- b) Montrer que $\mathbb{E}[X_i]$ existe et que

$$\mathbb{E}[X_i] = n \frac{a}{a+b}$$

- c) En déduire que $\mathbb{E}[X]$ existe et que

$$\mathbb{E}[X] = np$$

où p est la proportion de boules rouges initiale dans l'urne.

- d) Comparer avec le modèle avec remise.

EXERCICE 10: – *Modéliser* –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce truquée. Celle-ci affiche Pile avec la probabilité p . On appelle k -chaîne une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné Pile, cette suite devant être suivie d'un Face ou être la dernière du tirage. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, soit X_k le nombre total de k -chaînes de Piles obtenues au cours des n lancers.

1. Déterminer la loi de X_n
2. Déterminer la loi de X_{n-1} .

EXERCICE 11: – *Modéliser – Mobiliser* –

4 coups sont tirés sur une cible lointaine avec une probabilité de réussite par coup de 30%. Chaque joueur doit payer 10 euros pour avoir le droit d'essayer, puis gagne 10 euros par tir réussi. On nomme X le nombre de coups réussis et Y le gain du joueur.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est l'espérance et la variance de Y ?
3. Quelle est la probabilité de ne pas perdre d'argent ?

EXERCICE 12: – *Modéliser – Raisonner* –

Un restaurant dispose de 80 places. La pratique montre qu'en moyenne, 20% des clients ayant réservé le soir ne viennent pas.

1. Combien de réservations le restaurant pourrait-il "raisonnablement" accepter en moyenne avant d'être débordé ?
2. Déterminer la probabilité (sous forme de somme) de ne pas avoir finalement assez de place en effectuant le raisonnement précédent. (*On pourra éventuellement faire le calcul à l'aide de l'outil adapté à calculatrice ou avec Python.*)

Variables aléatoires discrètes

EXERCICE 13: – *Calculer* – Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par

$$p_n = \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que $P(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer l'espérance de X .

EXERCICE 14: – *Calculer* – Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par

$$p_n = \frac{\alpha}{n(n-1)} \quad \forall n \in \Omega = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$$

1. Déterminer α de manière à ce qu'il existe une variable X telle que $\text{Supp}(X) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que l'espérance de X n'existe pas.

EXERCICE 15: – *Calculer* –

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X une application définie par

$$P\left(X = \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{\alpha}{(n-1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer α de manière à ce que X soit une variable aléatoire.

2. Déterminer $\mathbb{E}[X]$ si elle existe.

EXERCICE 16: – *Raisonner* –

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X \geq k+1) = \frac{1}{2}P(X \geq k).$$

Déterminer la loi de X .

EXERCICE 17: – *Modéliser – Calculer* – Grand-mère a offert un renne en peluche à sa petite fille pour Noël. Chaque Noël, la probabilité pour que l'enfant s'intéresse à ce jouet dans l'année qui suit est de 0,3, chaque année étant indépendante de la précédente. On appelle X le nombre d'années passant jusqu'à ce que la petite fille se soit intéressée au jouet dans l'année. Déterminer :

1. $\mathbb{E}[X]$ et $\sigma(X)$.
2. La fonction de répartition de X .
3. Le nombre d'années minimum que doit envisager d'attendre la grand-mère pour avoir une probabilité supérieure à 0,8 que son cadeau ait finalement été apprécié à sa juste valeur.

EXERCICE 18: – *Modéliser – Mobiliser* –

La poissonnerie de la rue des bouchers est en contrebas du trottoir. Pour y accéder, il faut descendre une marche inattendue. La nombre X d'entorses par semaine que se font les chalends suit une loi de Poisson de paramètre 7.

1. Quel est le nombre moyen d'entorses par semaine ?
2. a) Calculer la probabilité de ne pas avoir d'accident dans la clientèle durant une semaine.
b) On note $\mu = \mathbb{E}[X]$ et σ l'écart type de X . Déterminer la probabilité que le nombre d'entorse soit inclu dans l'intervalle

$$[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$$

Voyant baisser son chiffre d'affaire, la poissonnière placarde une mise en garde sur la porte. Le nombre Y d'entorses par semaine tombe alors à trois en moyenne.

3. a) Les mauvaises semaines sont celles pendant lesquelles il y a plusieurs entorses. Estimer leur proportion sur une année.
b) Les semaines étant ainsi indépendantes les une des autres, estimer le nombre moyen de mauvaises semaines dans le mois. (*on compte 4 semaines dans le mois.*)

EXERCICE 19: – *Modéliser – Mobiliser* – Le Beaujolais nouveau est arrivé. Un amateur éclairé, mais excessif, se déplace de réverbère en réverbère. Quand il se lance pour attraper le suivant, il a 80% de chances de ne pas s'étaler. Pour gagner le bistrot convoité, il faut en franchir 7. On note X le nombre de réverbères atteints sans chute.

1. Établir la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Enfin parvenu dans l'ascenseur pour la scène de ménage, il appuie au hasard sur un des huit boutons. Soit Z le nombre de boutons pressés avant d'arriver à son étage, ou de déclencher l'alarme qui fera venir la concierge. Déterminer la loi de Z . Combien d'essais lui faut-il en moyenne avant de voir sa femme ou sa concierge.

EXERCICE 20: – *Calculer* – Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Y = (-1)^X$ lorsque X suit une loi de *Poisson* de paramètre $\lambda > 0$.

EXERCICE 21: – *Calculer* – Caractérisation d'une loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $p_n = P(X = n) > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. X suit la loi de *Poisson* de paramètre λ .
2. pour tout $n \geq 1$ on a, $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$.

EXERCICE 22: – *Calculer* – Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

EXERCICE 23: – *Raisonner* –

☆

Soit X une v.a. discrète telle que $\text{Supp}(X) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) + nP(X \geq n+1) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$$

2. Montrer que si X admet une espérance alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nP(X \geq n+1) = 0$.
3. En déduire que X admet une espérance $\iff$ la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} (P(X \geq k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Montrer que dans ce cas $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.

Indications

Exercice 1

On rappelle qu'à toutes fins utiles, la surface d'un disque de rayon r est πr^2 .

Exercice 9

2. b) On pourra éventuellement calculer si besoin $P(X_i = 0)$ (ne pas obtenir la boule k .)

Exercice 13

1. Il s'agit simplement de vérifier que p est une loi de probabilités...

$$\text{Pour ceci, déterminer } a, b, c \text{ tels que } \frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

2. Déterminer a, b tels que $\frac{4}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$

Exercice 20

Le calcul a déjà été fait dans des feuilles précédentes. Se souvenir de la technique.