Primitives et Intégrale sur un segment

Exercice 1: – *Mobiliser* – Primitives classiques

f désigne une fonction définie et continue sur un domaine de définition et d'intégration maximal $\mathcal{D}_f$ et F une primitive de f sur $\mathcal{D}_f$. Remplir le tableau.

$f(x)$	$F(x)$	$\mathcal{D}_f$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$		
$\dfrac{1}{x}$		
e^x		
$a^x,\quad a > 0, a \neq 1$		
$\sin x$		
$\ln x$		
$\cos x$		
$\tan x$		
$\operatorname{cotan} x$		
	$\tan x$	
	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	
$\dfrac{1}{\sqrt{b+x^2}}, b > 0$		
	$\arctan x$	
$\dfrac{1}{a^2+x^2},\ a \neq 0$		
$\dfrac{1}{a^2-x^2},\ a \neq 0$		

Exercice 2: – *Calculer* – Changement de variable dans une intégrale

Soit $a > 0$. On considère

$$I = \int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

1. Par changement de variable $t = \frac{1}{x}$, montrer que $I = -I$.
2. En déduire la valeur de I.

Exercice 3: – *Calculer* – PPP et Changement de variable dans une primitive

On pose ici la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(t) = \cos\sqrt{1-t}.$$

1. À l'aide d'une primitivation par partie, montrer pour commencer que sur $\mathbb{R}$:

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x$$

2. En déduire ensuite, par un changement de variable en $x = \sqrt{t-1}$ une primitive de f.

Exercice 4: – *Calculer* – Fractions rationnelles $\frac{1}{\text{“degré 2”}}$

L'objet de cet exercice est de déterminer une primitive ou intégrale de chaque fraction demandée.

1. Soit
$$f(x) = \frac{1}{4x^2+4x+1}$$
   a) Montrer que le dénominateur s'écrit sous forme $(\alpha x + \beta)^2$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   b) En déduire le domaine de continuité de f ainsi qu'une primitive de f.
2. Soit
$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$$
   a) Décomposer le dénominateur en produit de facteurs irréductibles.
   b) En déduire que $f(x)$ s'écrit
$$f(x) = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$$
   avec $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.
   c) En déduire une primitive de f sur son domaine de continuité.

3. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$$

- **a)** Exprimer le dénominateur sous la forme canonique du polynôme et vérifier que f est ainsi bien définie.
- **b)** En déduire $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f$.

EXERCICE 5: – *Calculer* – Fractions rationnelles $\frac{P}{\text{"degré 2"}}$

1. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \frac{4x+3}{x^2+3}$$

- **a)** Chercher un polynôme α $\alpha\frac{(x^2+3)'}{x^2+3} + \frac{\beta}{x^2+3}$.
- **b)** En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+3}$$

☆

- **a)** Transformer l'écriture de $f(x)$ en "polynôme" $+ \alpha\frac{(x^2+3)'}{x^2+3} + \frac{\beta}{x^2+3}$.
- **b)** En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$ en s'inspirant des méthodes précédentes.

3. Soit, pour $x > 2$:
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$$

☆

- **a)** Écrire $f(x)$ sous la forme $\alpha x + \frac{bx+c}{x^2-4}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

4. Soit
$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-2x+4}$$

☆☆

S'inspirer de toutes les méthodes précédentes pour déterminer une primitive de f sur son domaine de continuité.

EXERCICE 6:

1. n entier, $n \geqslant 2$, Primitive de $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$

- **a)** On note I_n la primitive de $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$ s'annulant en 0. Montrer que ☆
$$I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$
- **b)** En déduire une primitive de $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^2}$, $a \neq 0$.
- **c)** En déduire une primitive de $\dfrac{x}{(x^4+1)^2}$

EXERCICE 7: – *Calculer* – Polynômes et Fractions rationnelles en cos, sin.

Déterminer

1. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$.

3. $\displaystyle\int (\tan x + 1)^2 dx$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ sur $x \in]0, \pi[$. ☆

EXERCICE 8: – *Calculer* – Changement de variable

Par le changement de variable suggéré, déterminer

1. $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$ (changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$)

2. Une primitive de $\frac{1}{3+e^{-x}}$, avec son domaine de validité (changement de variable $t = e^x$.)

EXERCICE 9: – *Calculer* – Sommes de Riemann

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ ☆

EXERCICE 10: – *Calculer* – *Raisonner* – ☆☆

On cherche à trouve l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$

1. Écrire la somme sous la forme d'une somme de Riemann et expliciter une fonction f telle que
$$n\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. La fonction f trouvée est-elle continue sur $[0,1]$? Peut-on appliquer les sommes de Riemann ?

3. Déterminer une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[0,1]$ telle que
$$n\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{f}\left(\frac{k}{n}\right)$$

4. Conclure quant à la problématique.

EXERCICE 11: ☆

Déterminer la limite de $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$

EXERCICE 12: – *Chercher* – *Calculer* – ☆☆

Soit $A_1A_2\ldots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Chercher $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=2}^{n} A_1A_k$.

Exercice 13: – *Calculer* – *Chercher* – Approximation par la méthode des rectangles ☆☆

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   On pose $I_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right)$.
   Montrer que
   $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - I_n\right| \le M\cdot\frac{(b-a)^2}{2n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad \text{où } M=\sup_{[a;b]}|f'|$$
2. Application : déterminer un nombre à un chiffre après la virgule qui soit une valeur approchée de $\ln 2$ à $0,1$ près.

Intégrale généralisée

Exercice 14: – *Calculer* – Calcul direct
Étudier la convergence puis calculer, en cas de convergence, les intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\alpha\in\mathbb{R}$
2. $\int_0^1\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\alpha\in\mathbb{R}$
3. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\alpha\in\mathbb{R}$
4. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
5. $\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t$.
7. $\int_0^1\ln(t)\,\mathrm{d}t$
8. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan(t)\,\mathrm{d}t$
10. $\int_1^2\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t-2}}$
11. $\int_0^{+\infty}(2x^2-x)e^{-3x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15: – *Chercher* – *Calculer* –
Étudier la convergence puis calculer, en cas de convergence, les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{|t|}\,\mathrm{d}t$
3. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ☆
4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^{-t^2}}{2+|\sin t|}\,\mathrm{d}t$ ☆

Exercice 16: – *Calculer* – Les changements de variable
Étudier la convergence puis calculer, en cas de convergence, les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty}te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $u=\sqrt{t}$.
2. $\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $u=\sqrt{1-t}$
3. $\int_2^{+\infty}\frac{e^t}{e^{2t}-5e^t+6}\,\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $u=e^t$.
4. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2+2x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 17: – *Chercher* – étudier la convergence des intégrales ci-dessous

1. $\int_0^1\frac{\sin t-t}{t(\cos t-1)}\,\mathrm{d}t$
2. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$
3. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\alpha>1$ ☆☆
4. $\int_0^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{t^3-t^2+1}}\,\mathrm{d}t$ ☆☆
5. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(1-e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}}\right)\mathrm{d}t$.
6. $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 18: – *Chercher* – *Mobiliser* – *Calculer* – Pour $a\in\mathbb{R}^*$, $b>0$, étudier la convergence et déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty}\cos(at)e^{-bt}\,\mathrm{d}t$

Exercice 19: – *Chercher* – ☆
Déterminer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 0, x>0}\int_x^{2x}\frac{\cos(t)}{t}\,dt$$

Exercice 20: – *Chercher* – *Calculer* – *(ENS)*

1. étudier la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ ☆
2. En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\sin(e^t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21: – *Chercher* – *(ENS)* ☆☆
Soit f une fonction continue sur $[a;b[$, où $a,b\in\bar{\mathbb{R}}$.
Soit g une fonction définie et non nulle au voisinage de b telle que
$$\lim_{t\to b}\frac{f(t)}{g(t)}=\ell\in\mathbb{R}$$

1. Montrer que, si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que, si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
3. *Application :* Déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\sqrt{\ln(t+1)}-\sqrt{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

Exercice 22: – *Chercher* – Comparaison série-intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante

1. Montrer que :

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad f(k) \geqslant \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

2. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature, avec, en cas de convergence,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \geqslant \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

3. En cas de convergence, encadrer le reste $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f.

4. *Application :* Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent pour $n \to \infty$ de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Indications

Exercice 4

1. b) Reconnaître une formue usuelle.

2. b) On se sert des racines a, b trouvées dans la question précédente

Exercice 6

1. c) Un changement de variables $u = x^2$ fonctionne très bien.

Exercice 7

• En cas de polynôme en sin et cos, on peut simplifier les expression, notamment grâce à la linéarisation de cos et sin.

•En cas de fraction rationnelles $R(\cos x, \sin x)$, si les formules de trigonométrie ne permettent pas de s'en sortir rapidement, il existe quelques "règles" pratiques pour tenter de siplifier les calculs, les **"règles de Bioches"** (HP) :

. Si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par le changement $x \to \pi - x$, on tente le changement de variables $u = \sin x$.
. Si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par le changement $x \to -x$, on tente le changement de variables $u = \cos x$.
. Si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par le changement $x \to x + \pi$, on tente le changement de variables $u = \tan x$.
. Sinon, on pourra tenter le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. En effet, dans ce cas, on $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

4. On pourra poser $u = \cos(x)$ et observer que $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ si sin est positif.

Exercice 9

2. On pensera d'abord à manipuler ce produit pour en déduire une somme de Riemann à calculer.

Ensuite, pour le calcul de l'intégrale, on pensera à faire une IPP afin de transformer en calcul d'intégrale de fraction rationnelle.

Exercice 11

On pourra penser à encadrer $\mathbb{E}(\sqrt{k})$ par les valeurs "simples" les plus proches sans partie entière.

Exercice 12

Commencez par trouver la formule de la longueur du segment A_1A_k puis utilisez le théorème des sommes de Riemann

Exercice 13

2. $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 15

1. On peut tenter une IPP. (On réfléchira à ce qu'il vaut mieux dériver...)

Exercice 16

2. On pourra essayer un changement de variable pour se débarrasser se la racine.

3. On pourra essayer un changement de variable pour se transformer le dénominateur en polynôme.

Exercice 17

3. On pourra majorer $\ln t$ par un t^β en choisissant β de manière judicieuse.

Exercice 20

1. On pourra tenter une IPP pour le cas le plus problématique.

2. Un changement de variable peut s'avérer utile, pour se ramener au cas de la question 1.