Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

Exercice 1: [Indications] – *Cours* – Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne $\boxplus$ définie par $a \boxplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe $\bullet$ telle que $\lambda \bullet a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \boxplus, \bullet)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2: [Indications] – *Cours* – On considère $E = \mathbb{C}^2$ muni de la loi interne $\boxplus$ habituelle $+$ et de la loi externe $\bullet$ définie par $\lambda \bullet (x, y) = (\lambda x, 0)$. $(E, \boxplus, \bullet)$ est -il un $\mathbb{C}$ espace vectoriel ?

Exercice 3: [Indications] – *Cours* – Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $(a, b) \boxplus (c, d) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad ; \quad \lambda \bullet (a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$.
2. $(a, b) \boxplus (c, d) = (c, d) \quad ; \quad \lambda \bullet (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.

Exercice 4: [Indications] – *Cours* – complexifié de E
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle :

$$(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') = (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}')$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par :

$$(a + i.b).(\vec{x}, \vec{y}) = (a.\vec{x} - b.\vec{y}, a.\vec{y} + b.\vec{x})$$

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Sous espaces vectoriels

Exercice 5: [Indications] – *Cours* – Déterminer si les ensembles F ci-dessous sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^*$.
2. $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x = 1\right\}$.
3. $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$
4. $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad x_1 x_3 = 0\right\}$.
5. $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0\right\}$ ☆
6. $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad |x_1| = |x_2|\right\}$. ☆
7. $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \quad x = 0, y = z\right\}$;
8. $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + xy \geq 0\right\}$; ☆
9. $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\right\}$
10. $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \leqslant y\right\}$ ☆
11. $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y = 1\right\}$.
12. L'ensemble des solutions (x, y, z) du système : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z &=& 0 \\ x - 4y + 7z &=& 0 \\ x + 3y - 6z &=& 0. \end{array}\right.$
13. L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.

Exercice 6: [Indications] – *Cours* – *Calculer* –
Déterminer si les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ avec n à déterminer au cas par cas.

1. $F = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 1\right\}$.
2. $F = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 - 2z_2 = 0\right\}$.
3. $F = \left\{z \in \mathbb{C}^* \mid arg(z) = \frac{\pi}{3} \ (\pi)\right\} \cup \{0\}$.

Exercice 7: [Indications] – *Cours* – *Registre* – L'ensemble $\mathcal{H}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour :

1. $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) : \quad f(1) = 0\}$
2. $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \quad f(0) = 1\}$
3. $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \quad f \text{ est croissante}\}$.
4. $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \quad f \text{ s'annule}\}$
5. $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad f \text{ est impaire}\}$
6. $\mathcal{H} = \{f : I \to \mathbb{R} : \quad f \text{ est bornée}\}$ avec $I \subset \mathbb{R}$
7. $\mathcal{H} = \{f : I \to \mathbb{R} : \quad \sup_I |f| \leqslant M\}$ avec $M \in \mathbb{R}$ fixé et $I \subset \mathbb{R}$,
8. $\mathcal{H}$ l'ensemble des primitives de $x \mapsto xe^x$.
9. $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions f telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
10. $\mathcal{H} = \left\{f : I \to \mathbb{C} : \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\right\}$ avec $I = [a; +\infty[$; $a \in \mathbb{R}$.
11. $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)dt = 0\}$ pour $I = [a, b]$.
12. L'ensemble des fonctions sur $[a, b]$ $\mathcal{C}^0$, vérifiant $f(a) = 7f(b) + \int_a^b t^3 f(t)\, dt$.

Exercice 8: [Indications] – *Cours* – *Registre* – Sous-espaces vectoriels de polynômes.

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.

1. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \quad P' = 3\}$;
2. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \quad P'' = 0\}$;
3. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \quad \deg(P) = n\}$;
4. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \quad P + XP' = 0\}$;
5. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.

Exercice 9: [Indications] – *Cours* – *Registre* – Espaces vectoriels de matrices

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout ensemble E ci-dessous, dire si c'est est un espace vectoriel.

1. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $E = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
3. $E = \left\{\begin{pmatrix} a & 2a \\ \sqrt{2|b|} & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}\right\}$
4. $E = \left\{\begin{pmatrix} a & 2a \\ \sqrt{2}b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}\right\}$
5. E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 telles que le coefficient "en haut à gauche" est 1.

Exercice 10: [Indications] – *Calculer* – Pour chacun des sous-espaces F, G ci-dessous, déterminer, si possible, $F \cap G$. (Si ce n'est pas possible, justifier.)

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$.
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
3. $F = \mathrm{Vect}\big\{(1, 0), (0, 1)\big\}$ et $G = \mathbb{R}$.
4. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$ et $G = \{(a, -b, -a+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
5. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$.
6. Soient $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = x - y = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\Big((1, 0, 1, -2), (1, 0, 0, 1)\Big)$.

Équation cartésienne, famille génératrice

Exercice 11: [Indications] – *Calculer* – Déterminer une équation (ou système d'équations) cartésienne décrivant :

1. $A = \mathrm{Vect}\Big\{(1, 1, -1), (-1, -1, 3)\Big\}$.
2. $A = \mathrm{Vect}\Big\{(-2, 1, 1); (-1, 1, 2)\Big\}$.
3. $A = \mathrm{Vect}\Big\{(1, 1, 1)\Big\}$.

Exercice 12: [Indications] – *Calculer* – Trouver α et β scalaires pour que $(\alpha, \beta, 8, 3)$ appartienne au sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(3, -2, 1, 6)$ et $(4, 7, -2, 3)$.

Exercice 13: [Indications] – *Calculer* –

1. Montrer que l'ensemble
$$F := \left\{\begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-2b-c & a & 2a+b-c \\ a+3c & a+b+c & a-b \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$
est un sous espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en exhibant trois matrices A, B, C telles que $F = Vect(A, B, C)$.
2. Former une équation (ou système d'équations) cartésienne décrivant $G = \left\{\begin{pmatrix} a+b & a-b+c \\ a-2b-c & a \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 14: [Indications] – *Chercher* – Montrer que $x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{4})$ appartient à l'espace vectoriel engendré par $f_1 : x \mapsto \sin x$ et $f_2 : x \mapsto \cos x$.

Exercice 15: [Indications] – *Chercher* – *Raisonner* – Soient f_1, f_2 des éléments de $\mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$ définit par :
$f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \cos(x)$. On note $\mathcal{E} = Vect(f_1, f_2)$.

1. Montrer que les *deux* applications $g_1 : x \mapsto \cos^2(\frac{x}{2})$ et $g_2 : x \mapsto \sin^2(\frac{x}{2})$ forment une base de $\mathcal{E}$.
2. la fonction $x \mapsto \sin(x)$ appartient-elle à $\mathcal{E}$? ☆
3. Déterminer les coordonnées de la fonction $\varphi : x \mapsto 1 + 2\cos x$ dans la base $\mathcal{E}$.

Familles libres

Exercice 16: [Indications] – *Calculer* – Vérifier, par deux méthodes différentes, si les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont linéairement indépendants dans les cas suivants.

1. $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\quad \vec{b} = (1, 1, 1)$, $\quad \vec{c} = (2, 1, 2)$
2. $\vec{a} = (-1, 2, -2)$, $\quad \vec{b} = (1, 3, -1)$, $\quad \vec{c} = (2, 1, 1)$

Exercice 17: [Indications] – *Calculer* – *Raisonner* – Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les applications suivantes sont-elles linéairement indépendantes ?

1. $f : x \mapsto \cos x, \quad g : x \mapsto \sin x, \quad h : x \mapsto 1$
2. $f : x \mapsto x\cos x, \quad g : x \mapsto x\sin x, \quad h : x \mapsto x$
3. $f : x \mapsto \sin(x), \quad g : x \mapsto \cos(x), \quad h : x \mapsto \sin(2x), \quad k : x \mapsto \cos(2x)$
4. $f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto \cos x, \quad h : x \mapsto \cos^2 \dfrac{x}{2}$
5. $f : x \mapsto e^{ax}, \quad g : x \mapsto e^{bx}, \quad h : x \mapsto e^{cx}$, a,b,c 2 à 2 distincts. ☆
6. $(f_k)_{k=0,\dots,n}$ où, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $f_k : x \mapsto \sin^k(x)$. ☆☆

Exercice 18: [Indications] – *Calculer* – Déterminer par au moins deux méthodes différentes si les polynômes ci-dessous sont linéairement indépendants.

1. $P(X) = X^2 - X + 3$, $Q(X) = P'$, $R(X) = 1$.
2. $P(X) = X(X-1)$; $Q(X) = X^2 + 2$; $R(X) = (X-1)(X-2)$.
3. $P(X) = X^2 - X + 3$; $Q = P'$; $R = P' + P$; $S(X) = (P'(X) + 1)^2$.
4. $P(X) = X^3 + X^2 + 1$; $Q(X) = X^2 + X + 1$, $R(X) = X^3 - X$

Rang, dimension et bases

Exercice 19: [Indications] – *Calculer* – *Raisonner* – On pose $a = (3,1,2)$, $b = (1,0,1)$, $u = (2,1,1)$, $v = (0,1,-1)$. Montrer que $Vect(a,b) = Vect(u,v)$.

Exercice 20: [Indications] – *Calculer* – *Raisonner* – Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels ci-dessous :

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.
2. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$.
3. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0;\ y + z = 0;\ z + t = 0;\ t + x = 0\}$.
4. $\text{Vect}\{(1,3,-3),(4,2,-3),(-1,7,6)\}$
5. $\text{Vect}\{(4,-5,3),(2,3,-2),(4,-16,10),(8,1,-1)\}$
6. $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(\pi) = 0\}$.
7. $\text{Vect}(A,B,C)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
8. $\text{Vect}(A,B,C)$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.
9. l'ensemble des fonctions deux fois dérivables et dont la dérivée seconde est nulle.
10. L'ensemble des fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ vérifiant $af'' + bf' + cf = 0$, où $a,b,c \in \mathbb{R}$ fixés non tous nuls.
11. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^*$ fixés, l'ensemble engendré par les suites (u_n) définies par $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Coordonnées dans une base

Exercice 21: [Indications] – *Calculer* –

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{(2,1,1),(1,1,0),(2,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $(-4,1,-3)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 22: [Indications] – *Calculer* – On considère les vecteurs $\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (-1,-1,2)$ et $\vec{c} = (-2,1,-2)$

1. Montrer que $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées dans cette base d'un vecteur $\vec{u} = (x,y,z)$.

Exercice 23: [Indications] – *Calculer* – Soit $\beta = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base d'un espace vectoriel E

1. Montrer que la famille de vecteurs $\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{i}+\vec{j}$ est une base de E.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur de E dans cette base.

Exercice 24: [Indications] – *Calculer* – On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$

1. Montrer que les polynômes $f_0 = 1$, $f_1 = X$, $f_2 = X(X-1)$, $f_3 = X(X-1)(X-2)$ forment une base de E.
2. Quelles sont en fonction de a,b,c,d les coordonnées dans cette base d'un élément de E s'écrivant $aX^3 + bX^2 + cX + d$?

Exercice 25: [Indications]
Reprendre les polynômes de l'exercice 18 et montrer à l'aide de coordonnées (et de matrices si besoin) s'ils sont oui on non linéairement indépendants.

Exercice 26: [Indications]

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (A,B,C,D)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées des éléments de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Exprimer $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Indications

Exercice 5
On pourra éventuellement, en cas de doute, tenter si possible de représenter le domaine (à la main, avec Python ou à la calculatrice) pour se donner une idée et donner un contre exemple s'il le faut.

Exercice 17
2. On pensera à simplifier par x et à passer à la limite quand $x \to 0$ pour obtenir une première équation.

Exercice 18
Les deux méthodes au choix le plus pertinent : par spécialisation, par identification des coefficients ou par calcul de rang en écrivant les polynômes comme des vecteurs dans la base canonique $1, X, \ldots$, etc...