Polynômes

Racines

EXERCICE 1: – *Cours – Raisonner* – Trouver un polynôme P de degré 2 à coefficients entiers tels que $P(1-\sqrt{3})=0$

EXERCICE 2: – *Cours – Raisonner* –

1. Justifier que le polynôme $P(X)=X^5-X^2+1$ admet au moins une racine réelle.
2. a) Montrer que P' a exactement deux racines réelles α et β et les expliciter.
   b) Justifier que les racines ainsi trouvées ne sont pas doubles.
   c) Montrer qu'il existe des coefficients $b,c\in\mathbb{R}$ tels que
   $$P'=(X-\alpha)(X-\beta)(5X^2+bX+c)$$
   et tel que $(5X^2+bX+c)$ n'ait pas de racine réelle. *On ne demande pas d'expliciter b,c.*
   d) Étudier le signe de la fonction $x\in\mathbb{R}\mapsto P'(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que P n'admet qu'une seule racine réelle. *(On pourra éventuellement faire appel à une calculatrice pour calculer certaines valeurs approchées si besoin.)*

EXERCICE 3: – *Cours – Raisonner* –

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $P=1+X+\frac{X^2}{2!}\dots+\frac{X^n}{n!}$.

1. Montrer que si α est racine multiple de P, alors $\alpha=0$
2. En déduire que P n'a que des racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

Divisibilité

EXERCICE 4: – *Cours – Calculer* –

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Prouver que B divise A, où :

1. $B=X(X+1)(2X+1)$ et $A=(X+1)^{2n}-X^{2n}-2X-1$
2. $B=X^2+X+1$ et $A=X^{3n+2}+X^{3m+1}+X^{3p}$
3. $B=X^2-2X\cos\theta+1$ et $A=X^{2n}-2X^n\cos n\theta+1$. ☆

EXERCICE 5: – *Cours – Calculer* –

1. Soient $P\in\mathbb{K}[X]$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors P est divisible par $X-1$.
2. Soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P(X^3)+XQ(X^3)$ est divisible par X^2+X+1, alors P et Q sont divisibles par $X-1$. ☆

Factorisation

EXERCICE 6: – *Cours – Calculer* –

1. Soit $P=(X^2-X+1)^2+1$.
   a) Vérifier que i est racine de P.
   b) En déduire une autre racine de P.
   c) En déduire alors un polynôme Q tel que
   $$P=(X-\alpha)(X-\beta)Q$$
   où $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ sont à déterminer.
   d) En déduire pour finir la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.
2. Faire de même avec le polynôme $P=X^4+2X^2+1$.

EXERCICE 7: – *Calculer – Mobiliser* –

Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles les polynômes suivants :

1. $A=X^4-1$
2. Classique et à connaître : $B=X^2+X+1$
3. $C=X^4+X^2+1$
4. $D=X^3+X^2+X+1$
5. $E=X^6+X^4+X^2+1$ ☆
6. $F=X^5-13X^4+67X^3-171X^2+216X-108$

EXERCICE 8: –

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P_n=X^n-1$

1. a) Montrer que les $\alpha_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ sont racines de ce polynôme pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.
   b) Expliciter une racine réelle parmi celles évoquées ci-dessus.
   c) En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$ de P_n
2. Application : Chercher une factorisation dans $\mathbb{C}$ de
   a) $A=X^4+X^3+X^2+X+1$.
   b) $B=X^6-X^5+X^4-X^3+X^2-X+1$.

Exercice 9: *– Mobiliser – Calculer –* ☆

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$P = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n+1)!}.$$

1. Montrer que $n+1$ est racine de P ☆
2. Factoriser P en produit de facteurs irréductibles.

Divers "mini" problèmes

Exercice 10: *– Cours – Calculer – Raisonner – Chercher –*

On cherche à résoudre l'équation $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul.

1. On suppose que P est solution.
   - **a)** Quel est le degré de P ?
   - **b)** Quel est le coefficient dominant de P ?
   - **c)** Justifier que P admet au moins une racine réelle. On la notera α.
2. **a)** Montrer que soit α est racine au moins double de P, soit on a $P'' = 6(X-\alpha)$.
   - **b)** Trouver les P possibles dans les deux cas. ☆
3. Répondre à la question posée.

Exercice 11: *– Cours – Calculer – Raisonner – Chercher –* ☆

On veut résoudre $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Se poser la question, comme dans l'exercice précédent, du degré et voir si on peut déterminer rapidement un coefficient dominant.
2. Montrer que $Q = P(X^2)$ a deux racines complexes évidentes et les expliciter.
3. En déduire une racine de P.
4. En déduire l'ensemble des P possibles.

Exercice 12: *– Cours – Calculer – Chercher –* ☆☆

On cherche dans cet exercice l'ensemble des polynômes de degré $\geqslant 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

1. On note $n = \deg P$. On suppose que P' divise P.
   - **a)** Montrer qu'il existe une racine $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P = \frac{1}{n}(X-\alpha)P'$$
   - **b)** Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
   $$P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+1)}$$
   où $P^{(j)}$ est la dérivée $j^{\text{ème}}$ de P.
   - **c)** En déduire que nécessairement, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ il existe $a_j \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P^{(n-j)} = a_j(X-\alpha)^j$$
2. En déduire l'ensemble des polynômes P tels que P' divisent P.

Indications

Exercice 1

Quel pourrait être la deuxième racine ? Penser ensuite à la décomposition d'un tel polynôme en polynôme de degré 1.

Exercice 2

1. Regarder la parité du degré de P.
3. Faire le tableau de variation de P.

Exercice 4

2. On pourra exprimer les racines de B sous forme trigonométrique.

Exercice 5

1. Réfléchir à une éventuelle racine de P.

Exercice 7

en l'absence de calculs simples, on peut commencer par chercher une racine évidente dans la plupart des cas $(1, 2, 3, -1, -2, -3, i)$. Si tel est le cas, on pensera à vérifier si la racine est multiple.

3. On pourra commencer par poser $y = x^2$ dans la résolution de $x^4 + x^2 + 1 = 0$.
5. On peut poser $y = x^2$ dans la résolution de $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$

Exercice 8

2. **b)** On pourra remarquer que $T = \sum_{k=0}^{6}(-X)^k$ et se ramener ensuite au cas $X^n - 1$.

Exercice 9

1. On essaiera de reconnaître des coefficients binomiaux. La formule du binôme de Newton peut servir.
2. On pourra montrer que 1, puis 2, puis ...(jusqu'à où ?) est racine de P. .

Exercice 10

1. **a)** On pensera à faire d'abord une équation aux degrés.