Espaces probabilisés

Univers et support

Exercice 1: [Indications] – *Raisonner* – *Modéliser* –
Déterminer un espace probabilisé adapté à chacune des expériences aléatoires suivantes. On se demandera à chaque fois si les événements élémentaires sont équiprobables.

1. On lance un dé cubique. On s'intéresse au numéro affiché
  a) Si le dé est équilibré.
  b) Si le dé n'est pas équilibré.

2. Un groupe de n personnes s'alignent en une rangée. On s'intéresse à l'ordre dans lequel sont placées les personnes.

3. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5 et deux jetons portant le numéro 6. On extrait au hasard un jeton de l'urne. On s'intéresse au numéro obtenu tel que
  a) les événements élémentaires ne sont pas forcément équiprobables.
  b) les événements élémentaires sont équiprobables.

Exercice 2: [Indications] – *Modéliser* – *Cours* –
On dispose d'une urne contenant 6 boules rouges et 6 boules blanches. On tire 10 boules simultanément.

1. Déterminer l'univers correspondant aux différentes possibilités, de façon à ce qu'elles soient toutes équiprobables.

2. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer un support S de la variable ainsi que l'ensemble des probabilités $P(X = k)$ pour tout $k \in S$.

Espaces probabilisés quelconques

Exercice 3: [Indications]
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tels que

$$P(A) = 0,3 \qquad P(B) = 0,2 \qquad P(A \cap B) = 0,1$$

Calculer la probabilité pour que ni A ni B se produisent.

Exercice 4: [Indications] – *Chercher* – Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Montrer que

$$P(A) - P(\overline{B}) \leqslant P(A \cap B) \leqslant \min(P(A), P(B))$$

Exercice 5: [Indications] – *Chercher* – Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tels que

$$P(A) = P(B) = 0,5$$

Montrer que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap B)$.

Exercice 6: [Indications] – *Chercher* – Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tels que $A \cup B \cup C = \Omega$; $P(B) = 2P(A)$; $P(C) = 3P(A)$. Montrer que $P(A) \geqslant \frac{1}{6}$.

Exercice 7: [Indications] – *Raisonner* – *Chercher* – Montrer que si A et B sont des événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 8: [Indications] – *Chercher* – Soient A et B deux événements indépendants et incompatibles. Calculer $\min(p(A), p(B))$.

Espaces probabilisés finis

Exercice 9: [Indications] On procède à trois jets consécutifs d'un dé équilibré à 6 faces.

1. Construire un espace probabilisé Ω qui décrit cette expérience.

2. On considère les deux évènements suivants :
A : " la somme des points amenés par les deux premiers jets est impaire " ;
B : " la somme des points amenés par les deux derniers jets est impaire " ;
C : "Le nombre 1 apparait au moins deux fois. "
  a) Décrire précisément à l'aide d'une phrase les événements : $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \bar{B}$, $A \cap B \cap C$.
  b) Déterminer un espace probabilisé (triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$) qui permet de calculer les probabilités de ces différents événements, ainsi que les probabilités de A, B, C.
  c) Calculer toutes ces probabilités.

Exercice 10: [Indications] – *Chercher* –
On considère un jeu de fléchettes dont la cible comportes 3 zones numérotées de 1 à 3. On lance une fléchette sur la cible. On note

A_k : "La fléchette atteint la zone k" $\quad \forall k = 1, 2, 3$

et A_4 : "la fléchette sort de la cible."

On note p_k la probabilité de l'événement A_k.

Pour $k \in \{2,3,4\}$ la probabilité p_k d'atteindre la zone k est deux fois plus importante que celle d'atteindre la zone $k-1$.
Déterminer l'espace probabilisé associé à cette expérience.

Exercice 11: [Indications] – *Chercher* –
Une urne contient 6 boules numérotée de 1 à 6. On tire trois boules de suite avec remise. Quelle est la probabilité :
1. de pouvoir former une suite croissante avec les boules obtenues ?
2. de pouvoir former une suite strictement croissante avec les boules obtenues ?
3. d'obtenir précisément une suite strictement croissante ?
4. d'obtenir précisément une suite croissante ?

Exercice 12: [Indications] – *Chercher* – *Raisonner* – *Calculer* – ☆
Une urne contient $2n$ boules dont n blanches et n noires. On vide l'urne en effectuant n tirages au hasard de 2 boules simultanées.
On cherche à calculer la probabilité d'obtenir des boules de 2 couleurs différentes à chaque tirage. On considère les événements A ="on obtient des boules de 2 couleurs différentes à chaque tirage" et, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, A_k="on obtient des boules de 2 couleurs différentes au $k^{\text{ème}}$ tirage." On cherche donc à calculer $p(A)$.
1. Calculer $p(A_1)$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \{2,\dots,n\}$,
$$P_{\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} A_i}(A_k) = \frac{2(n-k+1)^2}{(2(n-k+1)(2(n-k+1)-1)}.$$
3. Exprimer A en fonction de $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$.
4. En déduire que $p(A) = \dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$ ☆

Exercice 13: [Indications] – *Cours* – *Modéliser* – *Calculer* –
Soit $(p,q) \in]0,1[^2$. On suppose que
- la probabilité d'atteindre une cible avec un tir est p.
- la probabilité de détruire la cible en k impacts est $1-p$.

On tire n fois. On cherche à calculer la probabilité de détruire la cible. On considère les événements A ="détruire la cible" et, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, B_k =" atteindre la cible k fois".
1. Déterminer, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $p(B_k)$ *(on pourra faire appel aux variables aléatoires finies si besoin.)*
2. Montrer, en utilisant le système complet $(B_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$, que
$$P(A) = 1 - \sum_{k=0}^{n} q^k P(B_k)$$
3. En déduire la valeur de $P(A)$.

Exercice 14: [Indications] – *Raisonner* – "Problème du tricheur"
Une population contient une proportion de p tricheurs (p réel et $0 \leqslant p \leqslant 1$). On fait tirer quatre cartes dans un jeu de 52 cartes à un individu choisi au hasard dans la population. Si c'est un tricheur, il obtient toujours un carré (i.e. "obtenir 4 cartes de même valeur").
1. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré pour une personne quelconque (c'est à dire qui n'est pas un tricheur) ?
2. Il obtient un carré. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

σ-additivité et systèmes (quasi)-complets

Exercice 15: [Indications] – *Calculer* – Existe-t-il une constante α telle que
$$p : \begin{array}{ccc} [\![2;+\infty[\![& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & \frac{(-1)^k}{k!} \end{array}$$
définisse une loi de probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec $\Omega = [\![2;+\infty[\![$?

Exercice 16: [Indications] – *Calculer* –
Soit p la probabilité définie sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$p(\{n\}) = \alpha 3^{-n}.$$
1. Déterminer α à l'aide du système complet formé des $\{n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $p(\{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\})$.
3. Calculer la probabilité de l'ensemble des multiples de 2.
4. Calculer la probabilité de l'ensemble des nombres n dont le reste est 3 si on le divise par 4.

Exercice 17: [Indications] – *Chercher* – *Raisonner* – *Calculer* –
Soient $p \in]0;1[$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système quasi complet d'événements tels que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,\dots,i\}$,
$$p(B_i) = p^i(1-p), \qquad p_{B_i}(A_k) = \binom{i}{k}\frac{1}{2^i}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,\dots,n\}$,
$$p_{A_k}(B_n) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^{n+1}}p^{n-k}(2-p)^{k+1}.$$
On utilisera la formule du binôme négatif admise :
$$\sum_{i=k}^{+\infty}\binom{i}{k}x^{i-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}, \quad \forall x \in]-1;1[,\ k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 18: [Indications] – *Chercher* – *Raisonner* – *Calculer* – Soient $\lambda > 0$, $p \in]0;1[$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système quasi complet d'événements tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,\dots,n\}$,

$$p(B_n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad p_{B_n}(A_k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$p(A_k) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

Variable aléatoire et Fonction de répartition

Exercice 19: [Indications] – *Cours* – Soit X une variable aléatoire discrète. On sait qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction de répartition de X est

$$F(x) = \begin{cases} b & \text{si } x < 1 \\ 2a & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ 5a & \text{si } 3 \leqslant x < 4 \\ 10a & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

1. Déterminer l'unique valeur possible de (a, b).
2. Vérifier que F est bien une fonction de répartition pour les valeurs de a, b trouvées précédemment.
3. X est elle une variable finie ? Déterminer sa loi.

Exercice 20: [Indications] – *Cours* – On choisit au hasard 2 numéros distincts de l'ensemble $\{-2,-1,0,1,2\}$. Soit X le produit de ces deux numéros.
1. Déterminer un espace probabilisé adapté à cette expérience.
2. Déterminer le support de X et l'ensemble des probabilités non négligeables $P(X = k)$.
3. En déduire la fonction de répartition de X.
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 21: [Indications] – *Raisonner* – *Calculer* –
On dispose d'une cible de rayon R découpée en quatre zones délimitées par trois cercles concentriques de rayon $\frac{R}{4}$, $\frac{2R}{4}$ et $\frac{3R}{4}$. Les zones ainsi délimitées sont numérotées de 1 à 4 en partant du centre.

On choisit au hasard un point sur cette cible et on appelle X le numéro de la cible sur laquelle on tombe. On admet (pour l'instant) que la probabilité de tomber sur un disque est proportionnelle à sa surface.
1. Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
2. En déduire la loi de probabilité de X.

Exercice 22: [Indications] – *Cours* – Soient a et b deux nombres réels et X une *v.a.*. On pose $Y = aX + b$
1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X.
2. *Application* : On pose $a = 2$, $b = 3$. Supposons que X suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,4\}$. Déterminer le graphique de la fonction de répartition de Y.

Exercice 23: [Indications] – *Cours* – *Raisonner* – Soient X, Y deux v.a. indépendantes de fonction de répartition F_X, F_Y. Déterminer en fonction de F_X et F_Y les fonctions de répartition des v.a.
1. $\max(X, Y)$.
2. $\min(X, Y)$

Exercice 24: [Indications] – *Cours* – *Calculer* –
1. Soit X une v.a de fonction de répartition F_X. Déterminer, en fonction de F_X, la fonction de répartition de la v.a.d. Y, où
   a) $Y = \ln X$. (avec X positive.)
   b) $Y = e^X$.
2. Appliquer à X un nombre au hasard choisi dans l'intervalle $]0,1]$, où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indications

Exercice 4

Pour montrer que $a \leq \min(\alpha, \beta)$ il est équivalent de montrer que

$$a \leq \alpha \text{ et } a \leq \beta$$

Exercice 5

Attention, il n'est dit nul part que les événements étaient incompatibles...

Exercice 6

Attention, on ne dit pas que les événements A, B, C sont incompatibles.

Exercice 7

Penser à décomposer B grâce à la partition $(A, \overline{A})$.

Exercice 8

On pourra s'intéresser au calcul de $P(A)P(B)$.

Exercice 10

On commence par chercher l'univers, puis la tribu associée et pour finir, les probabilités de chaque événement élémentaire.

Exercice 11

On pourra procéder par équiprobabilité et dénombrement en se référant aux modèles standards étudiés au début de la feuille.

2. On note S l'événement demandé, qui équivaut à dire que toutes les boules sont différentes.

Exercice 12

On pourra modéliser cette expérience en supposant que les boules sont toutes numérotées et donc distinces afin d'avoir équiprobabilité sur le tirage d'une boule en particulier.

Exercice 14

2. On pourra utiliser le fait que "être ou non un tricheur" est un système complet et s'aider éventuellement d'un arbre de probabilité qui explicite la situation.

Exercice 18

On pourra utiliser la formule des probabiltiés totales, mais attention, faire bien attention à ses bornes dans le calcul de la somme totale !

Exercice 19

1. Aller chercher les propriétés des fonctions de répartition.

Exercice 21

On rappelle à toutes fins utiles que la surface d'un disque de rayon r est πr^2.