Feuille 2 — Dénombrement

Modèles de base

Exercice 1: [Indications] – *Modéliser* – Soient n, p des entiers. Quel est le cardinal des ensembles suivants :

1. $[\![1;n]\!]^p$

2. **a)** $A = \{(i_1, \ldots, i_p) \mid i_k \in [\![1;n]\!]$ où les i_k sont 2 à 2 distincts.$\}$

b) $P = \{(i_1, \ldots, i_n) \mid i_k \in [\![1;n]\!]$ où les i_k sont 2 à 2 distincts.$\}$

3. $C = \{\{i_1, \ldots, i_p\} \mid \forall k = 1, \ldots, p,\ i_k \in [\![1;n]\!]$ où les i_k sont 2 à 2 distincts.$\}$

Exercice 2: [Indications] **"Modèle des urnes" :** Une urne contient n boules numérotées.

1. Combien y a t-il de manières d'effectuer

a) k tirages avec remise où l'on tient compte de l'ordre des tirages ?

b) k tirages sans remise où l'on tient compte de l'ordre des tirages ?

c) k tirages sans remise, et sans se soucier de l'ordre des tirages ?

2. Construire des fonctions Python d'argument k et n permettant de simuler l'ensemble des résultats de chacun de ces tirages. ☆

Exercice 3: [Indications] – *Modéliser* – **"Modèle des boites" :** On dispose de n boites discernables.

Combien y a t-il de manières de répartir

1. k boules discernables entres elles dans ces boites, avec la possibilité de mettre plusieurs boules dans la même boite ?

2. k boules indiscernables dans ces boites, avec au moins une boule par boite ?

3. k boules indiscernables entres elles dans ces boites ? (avec la possibilité de mettre 0 boule dans les boites.)

4. k boules indiscernables entres elles dans ces boites, sans mettre deux boules ou plus dans la même boite ?

Exercice 4: [Indications] – *Modéliser* –

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de $p-uplets$ $(i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que :

a) $i_1 + i_2 + \ldots + i_p = n$ avec $\forall k = 1 \ldots p,\ i_k \neq 0$

b) $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$

c) $i_1 + i_2 + \ldots + i_p = n$ (les i_k peuvent s'annuler)

d) $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n$

2. *Application :* Trois personnes A, B, C se partagent 7 pièces de 1 euros.

a) Combien de partages sont possibles si on autorise que certaines personnes n'aient rien ?

b) Combien y a-t-il de partages où chaque personne reçoit quelque chose ?

3. Établir les fonctions Python (d'argument p et n) permettant de simuler l'ensemble des p-listes demandées dans la question 1 (et accessoirement de les compter.) ☆

Exercice 5: [Indications] Découper suivant une partition ☆

But : trouver le nombre de solutions de $x + 2y + z + t = 2n$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{N}$.

1. Établir un programme Python d'argument n permettant de donner le nombre de 4-uplets $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ solutions de l'équation $x + 2y + z + t = 2n$.
(On pourra vérifier qu'il y a 6 391 possibiliités pour $n = 20$.)

2. **a)** Discuter le cardinal de l'ensemble

$$E_y = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4 \text{ tels que } x + z + t = 2n - 2y\}$$

suivant les valeurs de $y \in \mathbb{N}$.

b) En décomposant suivant les ensembles E_y adéquates, répondre à la problématique.
(Suivant les raisonnements effectués, un changement de variable $k = n - y$ ou $k = n - y + 1$ peut accélérer le calculs.)

Exercice 6: [Indications] – *Modéliser* – ☆

Compter le nombre de résultats possibles en effectuant k tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées sans se soucier de l'ordre des tirages ?

Concrètement

Exercice 7: [Indications] – *Modéliser* –

Les mousquetaires ont mélangé leur bottes dans le couloir de l'Auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend deux bottes au hasard. De combien de manières différentes peut-il associer

1. une vraie paire ?

2. deux bottes quelconques ?

3. deux bottes droites ?

4. deux bottes appartenant à deux personnes différentes ?

Exercice 8: [Indications] – *Modéliser* – On convient d'appeler "mot" n'importe quelle suite finie de lettre, même si celui-ci ne figure pas dans le dictionnaire.

1. Combien de mots de 8 lettres peut-on écrire avec les lettres A,B,C ?

2. Parmi eux combien contiennent :
   a) au moins une lettre A ?
   b) exactement une lettre A ?
   c) exactement 3 lettres A, 2 lettres B et 3 lettres C ?
   d) autant de lettre A que de lettre B ?

Exercice 9: [Indications] – *Modéliser* – Un paquet contient 3 feuilles vertes, 2 rouges et 5 blanches. On aimerait en faire un livret de 10 pages.

1. On suppose que les feuilles ne sont distinguables que par leur couleur. Déterminer le nombre d'agencement possibles tels qu'on alterne
   a) les feuilles colorées avec les feuilles blanches.
   b) comme dans la question précédente, mais également en alternant les feuilles vertes avec les feuilles rouges.
2. Reprendre la question en supposant que toutes les feuilles sont différentes.

Exercice 10: [Indications] – *Modéliser* – Combien y a-t-il de façon de répartir

1. 5 hommes et 4 femmes sur un banc comportant 9 places numérotées de 1 à 9 de telle manière que les femmes occupent les places paires ?
2. 3 hommes et 3 femmes autour d'une table ronde sans qu'une femme ne soit à coté d'une autre femme. (On rappelle qu'il n'y a ni début ni fin sur une table ronde ...)

Exercice 11: [Indications] – *Modéliser* – On considère les ensembles $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Combien existe-t-il d'applications de E dans F ?
2. Combien existe-t-il d'applications f de E dans F telles que $f(a) = 1$?
3. Combien existe-t-il d'applications injectives de E dans F ?
4. Combien existe-t-il d'applications surjectives de E dans F ?
5. Combien existe-t-il d'applications de $E \times F$ dans F^3 ?

Exercice 12: [Indications] – *Modéliser* – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Combien y a-t-il de surjections d'un ensemble de cardinal $n + 1$ dans un ensemble de cardinal n ?

Exercice 13: [Indications] – *Cours* – *Calculer* – gestion des formules ensenblistes

1. Compter à l'aide de Python le nombre d'entiers qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 5 compris entre 1 et 210.
2. Prouver le résultat mathématiquement.
3. Compter maintenant le nombre d'entiers qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 5, ni par 7 compris entre 1 et 210 ?

Coefficients binomiaux

Exercice 14: [Indications] – *Calculer* – *Modéliser* – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $C_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $C_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
2. $S_1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k}$ et $S_2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1}$
3. *Application :* Montrer qu'il y a autant de parties de $E = \{1, \ldots, n\}$ de cardinal pair d'éléments que de parties de cardinal impair.

Exercice 15: [Indications] – *Calculer* – *Modéliser* – Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. À l'aide de la formule de Pascal, calculer $\sum_{k=n}^{2n} \binom{k-1}{n-1}$
2. Calculer de deux manières différentes combien de mots de $2n$ lettres on peut former avec n lettres A et n lettres B, puis retrouver la formule.

Exercice 16: [Indications] – *Calculer* – Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, où $n \geqslant p$.

1. À l'aide de la formule de Pascal, montrer que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$
2. Calculer $S' = \sum_{k=p}^{n} k\binom{k}{p}$. *(On rappelle que* $(k+1)\binom{k}{p} = (p+1)\binom{k+1}{p+1}$*)*.

Exercice 17: [Indications] – *Calculer* – Formule de Vandermonde

1. Montrer que, pour tout entier $n, m \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, m+n]\!]$, on a
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Quelques problèmes

Exercice 18: [Indications] – *Modéliser* – Dénombrement par récurrence et partition

Amélie monte les escaliers de son immeuble pour aller à son appartement. Au départ, elle est tout en bas (marche 0). Elle peut, selon son humeur, monter d'une ou deux marches d'un coup sans jamais redescendre.

1. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de façons dont elle peut enchaîner les franchissements d'une ou deux marches pour arriver à la marche n.
   a) Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.
   b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle s le nombre de sauts de deux marches que peut faire Amélie pour atteintre la marche numéro n.
   a) Quelles sont les valeurs possibles pour s ?
   b) Calculer en fonction de s le nombre de pas nécessaires pour atteindre la case numéro n.
   c) Déterminer le nombre de façons d'atteindre la marche numéro n, en faisant s sauts de deux marches.
   d) En déduire, en fonction de n, la valeur de $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$.

Exercice 19: [Indications] *– Modéliser –* "une alternative au Problème de Galilée"
Georges et Méré jouent au 421 sur le comptoir d'un bar. Une discussion s'engage sur deux paradoxes.
1. Pourquoi, en lançant 3 dés, obtient-on plus souvent une somme de 10 que 12 alors qu'il y a autant de combinaison pour obtenir chaque résultat ?
2. Est-il plus fréquent d'obtenir au moins un 6 en lançant 6 fois un dé que d'obtenir au moins deux 6 en lançant 12 fois un dé ?

(Vous pouvez utiliser Python pour répondre aux questions.)

Exercice 20: [Indications] *– Modéliser –* On jette 4 dés. Dans combien de cas la somme de deux dés est-elle égale à la somme des deux autres ? (On pourra faire le raisonnement "à la main" ou avec Python.)

Exercice 21: [Indications] *(ENS) – Modéliser –* On dispose de a lettres A et b lettres B, avec ces $n = a + b$ lettres on forme un " mot ".
1. Combien de mots distincts peut-on former ?
2. Généraliser au cas de k lettres.
3. En déduire la formule : ☆

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}$$

Exercice 22: [Indications] *– Modéliser –*
1. Compter à l'aide Python le nombre d'entiers compris entre 1 et $10^{10} - 1$ dont le cube se termine par 11 ?
2. *(ENS)* Prouver le résultat mathématiquement.

Exercice 23: [Indications] *(ENS) – Calculer – Modéliser –* Nombre de dérangements ☆
On se donne n objets numérotés de 1 à n que l'on souhaite ranger sur n places numérotées de 1 à n. On appelle *dérangement sans coïncidence* tout placement de ces n objets sans qu'aucun d'eux ne soit à la place de son numéro.
1. Calculer le nombre D_n de dérangements sans coïncidence.
2. On appelle *dérangement avec k coïncidence* tout placement de ces n objets où exactement k objets sont à la place de leur numéro. On note $D_{n,k}$ le nombre de dérangement avec k coïncidences possibles. Justifier les égalités ci-dessous :
   a) $D_{n,n} = 1$; $D_{n,n-1} = 0$
   b) $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k}$.
   c) $\sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = n!$.
3. *Application :* Si un facteur distribue le courrier à 5 personnes au hasard. Combien y a-t-il de possibilités pour
   a) qu'aucune des personnes ne reçoive son courrier ?
   b) Au moins deux personnes recoivent leur courrier ?

Indications

Exercice 5
2. b) On pensera à se servir de la partition des (E_y).

Exercice 6
On peut par exemple se ramener à l'étude de l'ensemble $E = \{(\underbrace{1,\ldots,1}_{N_1 \text{ fois}}, \underbrace{2,\ldots,2}_{N_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{n,\ldots,n}_{N_n \text{ fois}}) \mid N_1 + N_2 + \ldots N_n = k\}$.

Exercice 7
Les mousquetaires sont 4 en tout ....

Exercice 12
Considérer la liste des $n+1$ images des éléments de l'ensemble de départ.

Exercice 13
2. Calculer le cardinal de l'ensemble $M_2 \cup M_5$, où M_i désigne l'ensemble des multiples de i dans $[\![1; 210]\!]$.
3. Commencer par trouver une formule pour le cardinal de $M_2 \cup M_5 \cup M_7$.

Exercice 14
2. Calculer $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$
3. Penser à établir une partition des possibilités en se servant des questions précédentes.

Exercice 15
2. On pourra par exemple faire une partition suivant le nombre exact de B au début du mot.

Exercice 16
2. Se ramener à la question précédente : penser à dire que $k = (k+1) - 1$!

Exercice 18

1. a) On pourra découper les possibilités en deux événements : $A =$ "la marche précédente est $n + 1$" et $B =$ "la marche précédente est n."

Exercice 19

1. Observer les résultats obtenus pour chaque dé.

Exercice 23

1. On passe par l'événement contraire.

   On note A_i l'ensemble des permutations pour lesquelles l'objet i est à la place i. Le nombre cherché est donc le cardinal de l'ensemble $\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n}$. Penser à la formule du crible.