# Feuille 17 - Fonctions de deux variables : révisions



## Définition et courbe

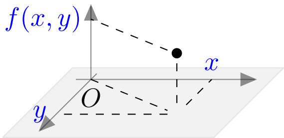
**Exercice 1:** Quel est l'ensemble de définition ? de continuité ? de la fonction $f$ définie par la formule ci-dessous

**1.** $f(x,y) = x^2 + \frac{\ln y}{x}$

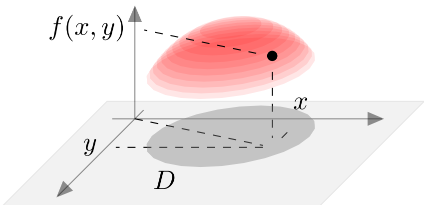
**2.** $f(x,y) = \sin x \cdot e^{-\sqrt{x-y}}$

**3.** $f(u,v) = u^2 v + \frac{1}{u^2+1}$

*On rappelle qu'une fonction de deux variables $f : D \to \mathbb{R}$ admet une représentation graphique en dessinant chaque point dans l'espace $(x,y,f(x,y))$ comme suit :*




*ce qui donne au final une surface comme par exemple :*




*Il est possible de représenter de telles surfaces avec Python ou par vous-même, mais ceci n'est pas à votre programme. Néanmoins, même si on ne vous demande pas de savoir les représenter, il faut quand même comprendre les notions associées qui vont suivre.*
*Notons par exemple que nous pouvons définir les applications partielles associées. Ce sont des fonctions* **d'une seule variable** *où l'on l'on choisit de faire "varier" soit $x$, soit $y$ et où on fixe l'autre comme constante. Pour $(x,y) \in D$, on pose*

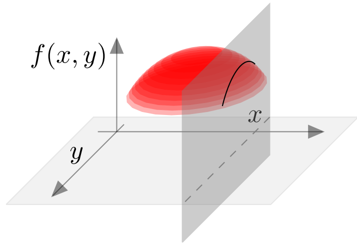
$$f_{x,\bullet}(y) = f(x,y) \qquad \textit{c'est donc } y \textit{ qui varie}$$

*et à $y$ fixé tel que $(x,y) \in D$, on pose*

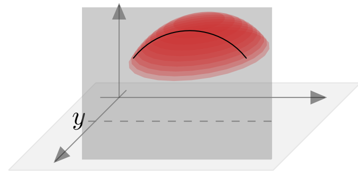
$$f_{\bullet,y}(x) = f(x,y) \qquad \textit{c'est donc } x \textit{ qui varie}$$

*Les courbes dans l'espace de ces deux fonctions sont les intersections de la surface avec les plans verticaux respectivement délimités par les plans ci-dessous :*

pour $f_{x,\bullet}$ à $x$ fixé :




pour $f_{\bullet,y}$ à $y$ fixé :



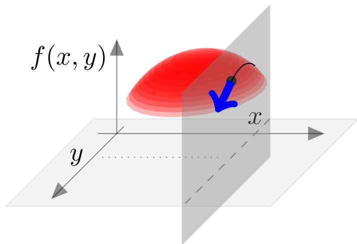

*Chacune de ces courbes est définie à l'aide d'une fonction d'une seule variable ($f_{x,\bullet}$ de variable $y$ et $f_{\bullet,y}$ de variable $x$) pour laquelle nous pouvons éventuellement déterminer des dérivées, dérivées secondes, etc... Ainsi, on rappelle que si la fonction $f$ est $\mathcal{C}^k$, il en va de même pour $f_x$ et $f_y$ et que l'on défini :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f'_{\bullet,y}(x), \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f'_{x,\bullet}(y)$$

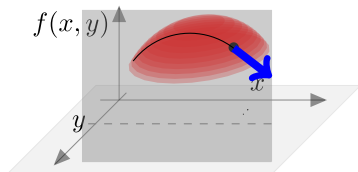
*Les fonctions $f_{\bullet,y}$ et $f_{x,\bullet}$ sont des fonctions classiques d'une seule variable. Les valeurs $f'_{\bullet,y}(x)$ et $f'_{x,\bullet}(y)$ correspondent alors au coefficient directeur des tangeantes aux courbes $f_{x,\bullet}$ et $f_{\bullet,y}$ en les points respectifs $y$ et $x$.*

*Graphiquement (démonstration HP) cela donne alors des vecteurs directeurs des tangentes qui sont respectivement $(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y))$ et $(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ :*

pour $f_{x,\bullet}$ à $x$ fixé :




pour $f_{\bullet,y}$ à $y$ fixé :



**EXERCICE 2:** – *Calculer* –

1. Soit $f(x,y)=\cos(2xy)+\frac{x^2}{y}$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ avec $y\neq 0$.

   Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2. Soit $f(x,y)=ye^x+\frac{x}{y}$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ avec $y\neq 0$.

   Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

*Attention, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sont que des notations pour désigner respectivement "la dérivée de $f$ par-rapport à la* <u>*première*</u> *variable" et "la dérivée de $f$ par-rapport à la* <u>*deuxième*</u> *variable", ce qui peut amener un certain nombre de confusions. Expliquons.*

*Par exemple, prenons $f(x,y)=yx^3+\ln y$ et notons $D$ son domaine de définition. On a par exemple*

$$f(1,2)=2\times 1^3+\ln 2$$

*(on a remplacé $x$ par 1 et $y$ par 2.) de façon générale, si on note, $(a,b)\in D$, on a :*

$$f(a,b)=b\times a^3+\ln b$$

*Pour les dérivées partielles, on a pour habitude de faire le calcul suivant :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{\text{dérivée par-rapport à la variable nommée } x}\Big(\underbrace{f(x,y)}_{\text{expression de } f(x,y)}\Big)$$

*Si on avait par exemple une fonction d'une variable classique $g$ telle que $g(x)=3x+\cos x$ et qu'on voulait calculer $g'(0)$, il ne nous viendrait pas à l'idée (normalement !) de faire*

$$g(0)=1$$

*puis d'affirmer que $g'(0)$ serait égal à*

$$\big(g(0)\big)'=0$$

*car en réalité,*

$$g'(0)=\text{"dérivée de } (3x+\cos x) \text{ prise ensuite en } x=0\text{"}=3-\sin 0=3\neq 0$$

*On a donc*

$$g'(0)\neq\big(g(0)\big)'$$

*De la même façon,*

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)}_{\text{fonction } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ évaluée en } (1,2)}\neq\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(f(1,2)\right)}_{\text{dérivée par-rapport à } x \text{ de l'expression } f(1,2)}$$

*tout comme (et c'est exactement le même problème)*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq\frac{\partial}{\partial x}\left(f(a,b)\right)$$

*Regardons ça de plus près :*

**Méthode FAUSSE**

"pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, dériver l'expression $f(1,2)$ ou $f(a,b)$ par-rapport à $x$", ce qui aurait donné

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)&=\text{"dérivée de } f(1,2) \text{ par-rapport à } x\text{"}:\ \frac{\partial}{\partial x}\left(f(1,2)\right)\\&=\text{"dérivée de } 2+\ln 2 \text{ par-rapport à } x\text{"}\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)&=\text{"dérivée de } f(a,b) \text{ par-rapport à } x\text{"}:\ \frac{\partial}{\partial x}\left(f(a,b)\right)\\&=\text{"dérivée de } b\times a^3+\ln b \text{ par-rapport à } x\text{"}\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$$

qui est donc **FAUX.**

Il ne faut donc pas confondre de manière générale les deux actions suivantes :
- dériver une expression par-rapport à la variable qui s'appelle $x$ : $\frac{\partial}{\partial x}$
- établir la formule de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

même si les notations sont très ressemblantes.

**Bonne méthode**

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$. On regarde par rapport à quelle variable on dérive. C'est $x$. cela désigne le fait que l'on dérive par-rapport à la première variable (celle de gauche, usuellement notée $x$.)

- On dit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\Big(x,y\Big)}\ \underbrace{=}_{\text{alors cette égalité est vraie}}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y)\right)=3yx^2$$

même lettre *ici* et là,
en première position.

- puis **ensuite** on l'évalue en $(1,2)$ ou en $(a,b)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=3\times 2\times 1^2=6,\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=3ba^2$$

*Pour la dérivée par-rapport à $y$ :*

**Bonne méthode**

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. On regarde par rapport à quelle variable on dérive. C'est $y$. cela désigne le fait que l'on dérive par-rapport à la deuxième variable (celle de droite.)

- On dit que

$$\frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\left(x,y\right)}_{\text{même lettre ici et là, en deuxième position.}} \underbrace{=}_{\text{alors cette égalité est vraie}} \frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y)\right) = x^3+\frac{1}{y}$$

- puis **ensuite** on l'évalue en $(1,2)$ ou en $(a,b)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 1^3+\frac{1}{2},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = a^3+\frac{1}{b}$$

*Entrainons-nous un peu :*

**Exercice 3:**

Prenons encore $f(x,y) = yx^3+\ln y$. Déterminer

1. a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)$
   b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$
   c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,y)$
   d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$
   e) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2x+3y,x-1)$

2. a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$
   b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2x+3y,x-1)$
   c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2x+3y,x-1)$
   d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(y,x)$

*Voyons si vous avez compris. On a dit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'étaient que des notations pour désigner la dérivée par-rapport à la "première" variable et à la "deuxième" variable. Il en existe d'autre (notamment en physique) où on écrit respectivement $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ à la place de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Essayez alors de déterminer les dérivées partielles ci-dessous pour voir si vous avez compris le principe.*

**Exercice 4:** Prenons encore $f(x,y) = yx^3+\ln y$. Déterminer

1. $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)$.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u,v)$.
3. $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x,y)$.
4. $\dfrac{\partial f}{\partial u}(y,x)$.

*Reprenons maintenant la signification graphique des dérivées partielles. On a vu que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ représentaient les coefficients directeurs des tangeantes des courbes $f_{\bullet,y}$ et $f_{x,\bullet}$ (dont on pourra aller voir un exemple de graphique en première page) en le point $(a,b)$ .*
*Ainsi, on rappelle en particulier que s'il y a un extremum pour $f$ en $(a,b)$, alors il y a un extremum en $b$ pour $f_{a,\bullet}$ et un extremum en $a$ pour $f_{\bullet,b}$ et on a*

$$\overrightarrow{grad}_{(a,b)}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) = (0,0)$$

**Exercice 5:** – *Cours* –

Soit $f(x,y) = \cos(2xy)+\frac{x^2}{y}$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ avec $y\neq 0$. Déterminer le gradient de $f$ au point $(0,5)$.

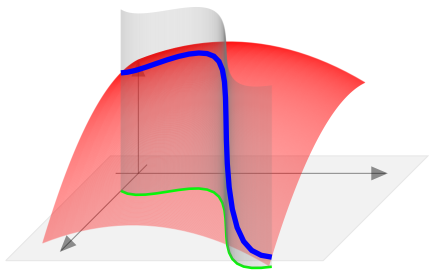
**Exercice 6:**

Soit $f(x,y) = ye^x+\frac{x}{y}$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ avec $y\neq 0$.
Peut-il y avoir un extremum pour $f$ ?

*On imagine maintenant qu'on suit une courbe sur le plan $(x,y)$ (ci-dessous la courbe en vert). On aimerait connaître la courbe engendrée sur la surface, c'est dire celle donnée par les points*

$$\big(x(t),y(t),g(t)\big)\qquad \text{où } g(t) = f\big(x(t),y(t)\big)$$

*(graphiquement l'intersection de la surface "verticale" grise avec la surface "rouge" qui est la surface représentative de $f$.)*
*C'est une courbe dans l'espace Elle est dessinée ici en bleu.*



*Tout comme pour les applications partielles, on peut déterminer des tangeantes pour cette courbe bleue, pour peu que tout soit bien dérivable. Mais attention, contrairement aux dérivées partielles, la valeur de $g'$ ne désigne pas exactement le coefficient directeur de la droite tangente. En réalité, le vecteur tangent à la courbe au point $(x(t), y(t))$ est donné par*

$$(x'(t), y'(t), g'(t))$$

*où, par formule de cours, on sait que*

$$g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)$$

*(mais ce vecteur tangent est donné à titre purement informatif. Il n'est pas à connaître, contrairement à la forlule de $g'(t)$ qui elle, figure à votre cours et doit être connue.)*

*La courbe paramétrée utilisée dans l'exemple ci-dessus est :*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t + \cos(1.5t) \end{cases}$$

*Ainsi, la courbe dessinée sur la surface est donnée par les points $(x(t), y(t), g(t))$ où*

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = f(t, t + \cos(1.5t))$$

*Pour dériver $g$, utilisons la formule de cours :*

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, t + \cos(1.5t)) + (1 - \sin(1.5t))\frac{\partial f}{\partial y}(t, t + \cos(1.5t))$$

*donc par exemple, pour $t = 0$,*

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$$

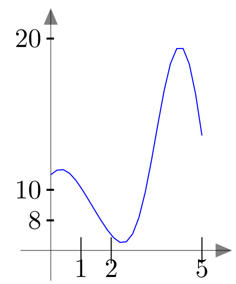
*En remarque, la fonction $g$ est également une fonction d'une seule variable qui peut se représenter classiquement dans le plan si on dispose d'une formule pour $f$. Par exemple, pour la courbe ci-dessus, en disposant de la formule de la surface :*

$$f(x, y) = 10 - x^2 + y^2$$

on a

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = f\big(t, t + \cos(1.5t)\big) = 10 - t^2 + (t + \cos(1.5t))^2$$

dont la représentation est la suivante :




**Exercice 7:** Soit $f$ une fonction $\mathcal{C}^1$ réelle. Déterminer

1. la dérivée de $h : t \mapsto t^2 f(\cos t, \ln t)$ en $\pi$.
2. la dérivée de $h : t \mapsto f(t^2, -t)$ en fonction de $f$.
3. les dérivées partielles premières de $g$ telle que $g(x, y) = \ln(f(3x, y)) + f(2, xe^y)$.
4. le gradient de $g : (x, y) \mapsto f(\sqrt{x} + y^2, x)$ en $(1, 1)$.
5. le gradient de $h : (x, y) \mapsto f(y, x)$.