# FEUILLE 14 — Produit scalaire

**EXERCICE 1:** – *Cours* – *Calculer* – *Chercher* –

Soient $A$ et $B$ les points de l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives $(2,-2,1)$ et $(1,2,2)$ dans un repère orthonormé centré en $O$.

**1.** **a)** Déterminer les longueurs $OA$ et $OB$.
**b)** Montrer que le triangle $OAB$ est isocèle rectangle en $O$.
**c)** En déduire la longueur du segment $[AB]$.

**2.** **a)** On Introduit $C_\alpha$ le barycentre de $(A,\alpha),(B,1-\alpha)$ pour $\alpha \in [0,1]$. Calculer la longueur $OC_\alpha$.
**b)** Comment vérifier en partie votre résultat ?
**c)** En déduire par exemple la longueur $OI$ si $I$ est le milieu de $[AB]$.

**3.** **a)** Soit $D$ un point de la droite $(AB)$. Déduire de toutes ces questions la ou les solutions de l'équation $<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}>=k$.
**b)** Proposer une autre méthode pour arriver à ce résultat.

**EXERCICE 2:** – *Calculer* – *Cours* –

Soit la base $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^3$ exprimée dans la base canonique.

**1.** Déterminer la matrice de Gram $G$ de la base $\mathcal{B}$.

**2.** Déterminer $<u,v>$ où $M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

**EXERCICE 3:** Trouver une base orthonormée de $\ker u$ où $u:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto x+y+z$.

**EXERCICE 4:** – *Cours* – ☆

Soient $x,y,z\in\mathbb{R}$ tels que $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$. Montrer que $(x+2y+3z)^2\leqslant 14$.

**EXERCICE 5:** – *Cours* – *Calculer* –

**1.** Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ (noté dans l'ordre $(v_1,v_2,v_3)$ ) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

**2.** Soit $M=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ (dans la base canonique). Déterminer les coordonnées de $M$ dans la base $\mathcal{B}$.

**3.** En déduire les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale de $M$ sur
**a)** $F=Vect(v_1,v_2)$
**b)** $G=Vect(v_3)$

**4.** Déterminer la distance
**a)** de $M$ à $F$
**b)** de $M$ à $G$.

**5.** Pour $A=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, déterminer
**a)** la projection orthogonale de $A$ sur $F$.
**b)** la projection orthogonale de $A$ sur $G$.

**6.** Pour $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, déterminer
**a)** $d(B,F)$
**b)** $d(A,G)$

**EXERCICE 6:** – *Cours* –

Soit $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\right)$ une base de $\mathbb{R}^4$.

**1.** Déterminer la matrice de Gram de $\mathcal{B}$.

**2.** Montrer que les vecteurs $u=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $v=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sont orthogonaux.

**3.** Supposons que l'on dispose d'une base othonormée $\mathcal{B}_2=\left(\frac{u}{||u||},\frac{v}{||v||},w_3,w_4\right)$. On pose $F=Vect(u,v)$.
**a)** Déterminer l'image de $N=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ par la projection orthogonale sur $F$.
**b)** Déterminer l'image de $M=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ par la projection orthogonale sur $F$.

**EXERCICE 7:** – *Cours* – *Mobiliser* – *Raisonner* – ☆

**1.** Montrer que la matrice $M=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&2&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$ est diagonalisable sans faire de calculs.

2. a) Vérifier que 3 est valeur propre de $M$ et que la dimension de son espace propre $E_3$ est 2 sans déterminer $E_3$.
   b) Déterminer à vue un premier vecteur propre.
   c) En déduire une base orthogonale de $E_3$.
3. En déduire un troisième vecteur propre puis ensuite sa valeur propre associée.

☆

**Exercice 8:** – *Calculer* – ☆☆

Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ caractérisé par le système d'équation

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthogonale $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_s)$ de $F$.
2. Déterminer l'image d'un point $M\in\mathbb{R}^4$ par la projection orthogonale $p$ sur $F$ en fonction de $v_1,\dots,v_s$.
3. En déduire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale $p$ sur $F$.
4. Calculer $d(e_1,F)$ où $e_1=(1,0,0,0)$.

## Aller plus loin

**Exercice 9:** – *Raisonner* – *(ENS)* ☆☆

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tA$ la transposée de $A$ vérifiant $A\,{}^tA\,A=I_n$.

1. a) Montrer $A$ est symétrique ☆☆
   b) En déduire que $A^3=I_n$.
2. Justifier que $A$ est diagonalisable.
3. Montrer que $A$ n'admet qu'une seule valeur propre. ☆
4. En déduire que $A$ est la matrice identité.

**Exercice 10:** – *Mobiliser* – *Raisonner* – ☆

Soit $E=\mathbb{R}^n$ avec $n\geqslant 3$. Soit $(u,v)$ une famille libre de $E$ et $f$ l'application définie sur $E$ par

$$f(x)=<u,x>v+<v,x>u.$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$
2. a) Vérifier que $\mathrm{rg}(f)\leqslant 2$
   b) En déduire une première valeur propre $\lambda_0$ de $f$ et un minorant de la dimension de l'espace propre associé.
3. Notons $(u,v,w_3,\dots,w_n)$ une base de $E$ avec $u,v\perp Vect(v_3,\dots,v_n)$. (On admet que ceci est possible.
   a) Quelle serait la matrice de $f$ dans cette base $\mathcal{B}$ ?
   b) En déduire l'existence de deux autres valeurs propres de $f$.

**Exercice 11:** – *Raisonner* – *(ENS)* ☆☆

Soit $E=\mathbb{R}^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $u$ et $v$ sont unitaires (i.e. de norme 1), on a

$$<u+v,u-v>=0$$

2. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que

$$<x,y>=0 \quad\Rightarrow\quad <f(x),f(y)>=0$$

   Montrer que $||f(u)||=||f(v)||$ pour tout vecteur $u,v$ tels que $||u||=||v||$.
3. Montrer qu'il existe $k\in\mathbb{R}^+,\ \ \forall x\in E,\ ||f(x)||=k||x||$.

**Exercice 12:** – *Raisonner* – ☆

Soit $(v_1,\dots,v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\qquad ||x||^2=\sum_{k=1}^n <x,v_i>^2$$

Montrer que $(v_1,\dots,v_r)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

---

**Problème :** Problème 2 du sujet de calcul et raisonnement (2024)

Pour tout entier $r$ non nul, on considère sur $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire usuel. Ainsi, si $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_r\end{pmatrix}$, alors leur produit scalaire $\langle X,Y\rangle$ est égal à $\sum_{k=1}^r x_ky_k$.

Comme le produit matriciel $X^\mathsf{T}Y$ est égal à la matrice $\left(\sum_{k=1}^r x_ky_k\right)\in\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, on identifiera $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en notant $\langle X,Y\rangle=X^\mathsf{T}Y$.
De même, la norme euclidienne de $X$ sera définie par $\|X\|=\sqrt{X^\mathsf{T}X}$.
Pour toute matrice $M$, on notera $\ker(M)$ son noyau et $\mathrm{Im}(M)$ son image.
On se donne trois entiers naturels non nuls $n$, $p$ et $q$.

1. Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Justifier que $(AB)^\mathsf{T}=B^\mathsf{T}A^\mathsf{T}$.
2. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que si $M$ est inversible, alors $M^\mathsf{T}$ aussi et que l'on a :

$$((M^\mathsf{T})^{-1}=(M^{-1})^\mathsf{T}.)$$

3. Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Prouver que le noyau de $A$ est égal au noyau de $A^\mathsf{T}A$.
   *Indication : on pourra étudier la quantité $X^\mathsf{T}A^\mathsf{T}AX$ lorsque $X\in ker(A^\mathsf{T}A)$.*

*À partir d'ici, le chapitre sur la réduction sera nécessaire.*

4. Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Justifier que $A^\mathsf{T}A$ est diagonalisable.

**5.** Dans cette question on considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telles que $A^\intercal A = PDP^{-1}$.
On fera en sorte que la première ligne de $P$ ne soit constituée que de 1.

On considère pour toute la suite une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On suppose que les colonnes de $A$ que l'on notera $C_1, C_2, \ldots, C_p$ forment une famille libre.

**6.** Donner la définition de la liberté de la famille $(C_1, \ldots, C_p)$ et en déduire que le noyau de $A$ est réduit au vecteur nul, puis que la matrice $A^\intercal A$ est inversible.

**7.** On considère la matrice $H = A(A^\intercal A)^{-1}A^\intercal$.
- **a)** Prouver que $H^2 = H$ et $H^\intercal = H$.
- **b)** Prouver que $\ker(H) = (\mathrm{Im}(H))^\perp$.
- **c)** Prouver que $\ker(H) = \ker(A^\intercal)$ puis que $\mathrm{Im}(H) = \mathrm{Im}(A)$.

On admet que cela prouve que l'application $p : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \mapsto HX$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$.
Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $g : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \|B - AX\|^2$.

**8.** Montrer que la fonction $g$ admet un minimum global atteint en un unique point : $\left(\hat{X} = (A^\intercal A)^{-1}A^\intercal B.\right)$

**9.** Simplifier $\hat{X}$ lorsque $n = p$. Le résultat est-il cohérent ?

**10.** Que vaut $\hat{X}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ?

## Indications

Exercice 4
Traduire ceci à l'aide de normes.

Exercice 7
**1.** Observer l'allure particulière de la matrice.

Exercice 10
**2. a)** S'intéresser à $\mathrm{Im}\, f$ comme $Vect(\ldots)$ grâce à a définition de $f$.

Exercice 11
**2.** Commencer par montrer l'égalité avec $u$ et $v$ unitaires + qst 1.
Deuxième étape, $u = ||u||e_1$ et $v = ||v||e_2 + e_1, e_2$ unitaires.