Densité

Densité

EXERCICE 1: [Indications] – *Cours – Calculer –*
Soit une variable aléatoire X de densité de probabilité

$$f(x)=\begin{cases}k\,x & \text{si } x\in[0,4],\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Déterminer la constante k.
2. Déterminer $P\big((X-2)(X-6)\leqslant 0\big)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
4. Retrouver $P\big((X-2)(X-6)\leqslant 0\big)$ grâce à la fonction de répartition de X.
5. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Y=(X-2)^2$.
6. Montrer que Y est à densité et déterminer celle-ci.

EXERCICE 2: [Indications] (Loi de Pareto) – *Cours – Calculer –*
Soit $\alpha>0$ et $a>0$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\alpha}{a}\left(\dfrac{a}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x\geqslant a\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Soit X une V.A.R. admettant pour densité f, déterminer sa fonction de répartition F.
3. Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de X.

EXERCICE 3: [Indications] (Loi de Cauchy) – *Cours – Calculer –*
Soit X une V.A.R. admettant pour densité f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1. Calculer $P(X^2-X<0)$.
2. X admet-elle une espérance ? Une variance ?
3. Montrer que X^2 admet une densité et la déterminer.

EXERCICE 4: [Indications] – *Calculer – Raisonner –* Soient $a>0$ et $\alpha>0$ et

$$f:x\to\begin{cases}0 & \text{si } x\notin[0,a[\\ \alpha x & \text{si } 0\leqslant x<\frac{a}{2}\\ \alpha(a-x) & \text{si } \frac{a}{2}\leqslant x<a\end{cases}$$

1. Calculer la constante α pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soient X une variable aléatoire de densité f et un réel $b\in\,]0,\frac{a}{2}[$.
   Calculer les probabilités $P\left(X>\dfrac{a}{2}\right)$ et $P\left(\dfrac{a}{2}-b<X\leqslant\dfrac{a}{2}+b\right)$.
3. Montrer que pour tout $b\in\,]0,\frac{a}{2}[$, les espaces $A=\left(X>\dfrac{a}{2}\right)$ et $B=\left(\dfrac{a}{2}-b<X\leqslant\dfrac{a}{2}+b\right)$ sont indépendants.

EXERCICE 5: [Indications] – *Cours – Calculer – Raisonner –*
Soit X une V.A.R. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ admettant une densité f que l'on pourra supposer continue sauf éventuellement en 0. On note F sa fonction de répartition.

1. Exprimer, en fonction de F, les probabilités $P(\sqrt{X}\leqslant x)$ et $P(\ln(X)\leqslant x)$ où $x\in\mathbb{R}$.
2. *Application :* Supposons que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.
   - a) Déterminer la fonction de répartition de $\sqrt{X}$ et $\ln X$.
   - b) En déduire que $\sqrt{X}$ et $\ln X$ admettent des densités et les déterminer.
3. Revenons au cas général de l'exercice. Montrer que $\sqrt{X}$ et $\ln X$ sont à densité et les déterminer, en les exprimant en fonction de f.

EXERCICE 6: [Indications] – *Cours – Raisonner –*
Soient X,Y deux v.a. indépendantes de densités respectives f et g. Montrer que les variables suivantes sont à densité. (On pourra supposer ici f,g continues).

1. $\max(X,Y)$
2. $\min(X,Y)$.
3. On choisit n fois de manière indépendante un nombre aléatoire X dans un intervalle $[0,1]$. On pose Z le plus grand des nombres obtenus.
   - a) Déterminer la fonction de répartition de Z.
   - b) Au bout de combien de choix la probabilité d'obtenir un nombre Z plus grand que $\frac{1}{2}$ est-elle supérieure à 99% ?
   - c) Montrer que Z est une variable à densité.

EXERCICE 7: [Indications] – *Cours – Calculer –*
Soit X une V.A.R. admettant pour densité f. (On pourra supposer f continue pour les calculs.)

1. Montrer que $|X|$ est V.A.R. admettant pour densité :
$$x\to\begin{cases}f(x)+f(-x) & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
2. Montrer que X^2 est V.A.R. admettant pour densité :
$$x\to\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x})+f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Loi uniforme

Exercice 8: [Indications] – *Cours* – *Calculer* –
Soit X une V.A.R. suivant la loi $\mathcal{U}_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$.

1. Tracer les repésentations graphiques de la densité et de la fonction de répartition X.
2. Déterminer $E[X]$ et $V[X]$.
3. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \tan(X)$ et en déduire si c'est une variable aléatoire à densité. (On déterminera la densité si c'est le cas.)

Exercice 9: [Indications] – *Cours* – *Calculer* – Soit X une V.A.R. suivant la loi $\mathcal{U}_{]-1,1[}$.

1. Montrer que $Y = X^2$ est une variable à densité
2. Déterminer la densité de Y.
3. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 10: [Indications] – *Cours* – *Calculer* – Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes chacune de loi uniforme sur $[0; 1]$. Déterminer la loi de

1. $X_1 + X_2$
2. $X_1 - X_2$ ☆
3. $X_1 + X_2 + X_3$ ☆☆

Lois normales

Exercice 11: [Indications] – *Calculer* – *Modéliser* –
Soit A une V.A.R. suivant la loi $\mathcal{N}(3, 2)$.
Quelle est la probabilité que l'équation $x^2 - Ax + 1 = 0$ admette :

1. une seule racine réelle ?
2. deux racines complexes non réelles ?
3. deux racines réelles distinctes ?

Exercice 12: [Indications] – *Cours* – Soit X une V.A.R. suivant la loi $\mathcal{N}(2, 1)$, déterminer la loi de

1. $Y = -X$.
2. $Y = -2X$.
3. $Y = X + b$

Exercice 13: [Indications] – *Calculer* –
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Montrer que $Z = e^{aX+b}$ admet une espérance et la calculer.
2. Montrer que Z admet en fait des moments de tout ordre.
3. En déduire l'espérance et la variance de Z.

Exercice 14: [Indications] – *Calculer* – *Mobiliser* – Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et $Z = e^X$. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité, dont on déterminera une densité f^Z. *(Cette loi s'appelle la loi log-normale.)*

Exercice 15: [Indications] – *Raisonner* – *Calculer* – *Modéliser* – La variable aléatoire X égale au poids d'une carotte du potager de Raimonde suit une loi normale. Sur une récolte de 400 carottes, 250 font moins de 20 grammes et 380 font plus de 12 grammes.

1. On suppose que ces proportions pratiques sont fidèles à la théorie. Évaluer $\mathbb{E}[X]$ et $\sigma(X)$.
2. Évaluer le pourcentage de carottes pesant plus de 18 grammes.
3. On arrache une carotte au hasard. Sachant qu'elle pèse plus de 15 grammes, calculer la probabilité pour qu'elle pèse moins de 18 grammes.

Exercice 16: [Indications] – *Raisonner* – *Calculer* – ☆
Soient b un nombre réel strictement positif et X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2, avec $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X)$.
Déterminer a pour que la probabilité de l'événement $(a < X \leq a+b)$ soit maximale.

Exercice 17: [Indications] – *Cours* – *Calculer* – *Modéliser* – Louise achète 9 sacs de blé à Robert d'une contenance étiqueté de 80kg chacun. (Elle s'attend donc à avoir 720kg de blé...) Robert d'étant pas toujours attentif, la masse du blé contenu dans un sac suit en réalité une loi normale $\mathcal{N}(80; 0.25)$. Les sacs sont mutuellements indépendants. Soit X la quantité de blé, en kilogrammes, que Robert lui a effectivement vendu.

1. Établir la loi de X.
2. Calculer la probabilité pour que Louise ait acheté en réalité moins de 720 kg de blé.
3. Dans le mois qui suit, les souris mangent en moyenne 50 kg de blé avec un écart-type de 20kg. En supposant que cette perte due aux rongeurs suit une loi normale, on note Y la quantité de blé qui lui restera au bout du mois, quand elle commencera à l'utiliser pour nourrir ses poules. Établir la loi de Y.
4. a) Déterminer a tel que $\Phi(a) = 0.05$ (où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.)
   b) Chaque poule picore en moyenne 150 grammes de blé par jours, avec un écart-type de 50, en suivant une loi normale. Quelle est la loi de la quantité de blé mangée en un an par une poule ? *(On suppose que le chat a mangé les souris et que les souris sont indépendantes.)*
   c) Combien Louise peut-elle nourrir de poules au maximum pendant un an (année non bissextile), avec une probabilité égale à 0.95 de ne pas manquer de grain ?

Exercice 18: [Indications] – *Cours* – *Calculer* – *Modéliser* –

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.

1. Calculer, pour $\lambda > 0$, la fonction de répartition de la variable aléatoire

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$$

et en déduire sa loi.

2. En déduire un algorithme permettant de simuler une variable aléatoire de loi exponentielle.

Exercice 19: [Indications] – *Mobiliser* – *Raisonner* –

Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la loi de $X = \max(X_1,\ldots,X_n)$.

Exercice 20: [Indications] – *Cours* – *Calculer* –

Soit X une V.A.R. suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Calculer la valeur exacte de $P(\tan X > 0)$.

2. Calculer $E[e^{-X}]$.

3. En utilisant l'exercice précédent, simuler une valeur au hasard de $\tan X$.

Exercice 21: [Indications] – *Calculer* –

Soit X une V.A.R. suivant la loi exponentielle de paramétre α.

Déterminer la loi de $Y = \ln X$.

Exercice 22: [Indications] – *Calculer* – *Cours* –

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre θ.

1. Montrer que X^3 est à densité, et en déterminer une densité.

2. Montrer que $\min(X, Y^3)$ est à densité. (On ne demande pas de la calculer.)

3. Montrer que $X - Y$ est à densité et déterminer une densité de $X - Y$. ☆

Exercice 23: [Indications] – *Calculer* – ☆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de :

1. $X + Y$

2. $\dfrac{X-Y}{2}$.

Exercice 24: [Indications] Loi exponentielle ; sans mémoire – *Cours* –

Un sous-marin voyage en plongée, mais doit cependant refaire surface de temps en temps pour prendre l'air et renouveler l'atmosphère. On suppose que la durée d'une plongée en jours suit une loi exponentielle de paramètre λ. En dépouillant tous les livres de bord, on constate que $88,7\%$ des plongées ont duré plus de 6 jours.

1. Donner une estimation du paramètre λ.

2. Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse une semaine.

3. **a)** Sachant que le sous-marin évolue immergé depuis au moins une semaine, calculer la probabilité pour que la durée dépasse 10 jours.

b) Comparez à la probabilité que l'immersion dépasse 3 jours. Que peut-on en conclure ?

Exercice 25: [Indications] – *Cours* – *Raisonner* – *Calculer* –

Robert participe à la course de moissonneuses-batteuses de Rochechouart. Il doit parcourir 60 tours qui sont éprouvants pour les pneumatiques de son engin. Il devra en changer exactement une fois ou deux fois selon leur degré d'usure. La probabilité pour qu'il en change deux fois est de $p = 0,4$.

À chaque passage à son stand, ses mécaniciens changent les qautre roues. Le temps mis pour changer une roue en minutes suit une loi exponentielle de moyenne 5. On change évidemment les 4 roues en même temps.

1. On note X le temps passé au stand pour un arrêt. Calculer la fonction de répartition puis la densité de X.

2. En déduire la loi de probabilité de T, temps total passé au stand sur toute la course.

Exercice 26: [Indications] – *Mobiliser* –

Chaque jour à 20 heures, Jacques attend Madeleine avec ses lilas. Le temps qu'il doit patienter avant son arrivée suit une loi exponentielle de moyenne 5 heures. Si elle arrive avant 22 heures, ils vont manger des frites chez Eugène par le tram 33, sinon, il rentre seul chez lui par le tram 21. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tickets de tram qu'il utilise en septante jours.

(On considère qu'il n'y a pas de phénomène de lassitude et que tous les soirs sont indépendants.)

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $V(X)$.

Indications

Exercice 5

1. On pensera à déterminer les supports en premier lieu.

Exercice 6

1. Passer par la fonction de répartition

2. Passer par la fonction de répartition

Exercice 13

2. Essayez de ne pas refaire les calculs.

Exercice 17

4. c) Déterminer la loi de la quantité de grain T mangée par n poules en un an. Puis se ramener à une variable suivant une loi normale centrée réduite pour pouvoir utiliser la table de la loi normale.

Exercice 26

1. septante signifie 70...

On pourra commencer par considérer le nombre T de tickets utilisés un des soirs.