Applications linéaires

Applications linéaires

EXERCICE 1: [Indications] – *Cours* –

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:\quad (x,y)\mapsto -x+\pi y$.
2. $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\quad x\mapsto 2x^2$.
3. $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\quad x\mapsto 4x-3$.
4. $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\quad x\mapsto \sqrt{x^2}$.
5. $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:\quad (x,y)\mapsto \sin(3x+5y)$.
6. $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3:\quad x\mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
7. $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:\quad (x,y)\mapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $x^2+y^2\neq 0$ et 0 sinon.
8. $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\quad (x,y)\mapsto$ la solution du système d'équations en (u,v) :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3u-v &=& x\\ 6u+2v &=& y.\end{array}\right.$$
9. $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\quad (x,y)\mapsto (y,x)$.
10. $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\quad (x,y)\mapsto \left(\ln(3^{x\sqrt{2}}), x+y\right)$.

EXERCICE 2: [Indications] – *Cours* – *Raisonner* –

Dire si les applications suivantes sont bien définies et linéaires.

1. Soit $a\in\mathbb{R}$. $u:\mathcal{C}(\mathbb{R})\to\mathbb{R};\quad f\mapsto f(a)$.
2. $u:\mathcal{C}(\mathbb{R})\to\mathcal{C}(\mathbb{R}):\quad f\mapsto \{t\mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\}$.
3. $u:\mathcal{C}([0,1])\to\mathbb{R}:\quad f\mapsto \max\limits_{t\in[0,1]} f(t)$.
4. $u:\mathbb{R}\to\mathcal{C}^1:\lambda\mapsto$ la solution de l'équation différentielle $y'-\frac{y}{x^2+1}=0$ valant λ en $x_0=1$.
5. $u:\mathcal{C}^1([0,1])\to\mathbb{R}:f\mapsto f'(1/2)+\int_0^1 f(t)\,dt$.
6. $u:\mathcal{F}(\mathbb{R})\to\mathcal{C}(\mathbb{R}):\quad f\mapsto\{x\mapsto \sin x\}$.
7. $u:\mathcal{C}(\mathbb{R})\to\mathcal{C}(\mathbb{R}):\quad f\mapsto\{x\mapsto f(x)\sin x\}$.
8. $u:\mathcal{C}([0,1])\to\mathbb{R};\quad f\mapsto \int_0^1 e^{-1+|f(t)|}\,dt$.
9. $u:P\in\mathbb{R}_3[X]\mapsto (P(-1),P(0),P(1))\in\mathbb{R}^3$
10. $u:P\in\mathbb{R}[X]\mapsto P-(X-2)P'\in\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 3: [Indications] – *Cours* – *Raisonner* –

Dire si les application suivantes sont des endomorphismes / des isomorphismes :

1. $u:\ \mathbb{R}_n[X]\longrightarrow\mathbb{R}[X]\ ;\ P\longmapsto X^2P'-nXP$
2. $u:\ \begin{array}{ccc}\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X]\\ (x,y,z) & \longmapsto & x+(y-z)X\end{array}$
3. $u:\ \mathbb{R}_2[X]\longrightarrow\mathbb{R}_2[X]\ ;\ P\longmapsto P'$
4. $u:\ \{f\in\mathcal{C}^1([-1,1])\mid \int_{-1}^1 f(t)dt=0\}\longrightarrow\mathcal{F}(\mathbb{R})\ ;\ f\longmapsto f'$

Matrice dans une base, injectivité, surjectivité

EXERCICE 4: [Indications] – *Calculer* – Soit la matrice $B=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\-1&2&-1&-3\\-3&5&2&-3\end{pmatrix}$.

1. Soit $f:E\to F$ une application linéaire de matrice B dans des bases fixées. Quelle est la dimension de E et celle de F ?
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

EXERCICE 5: [Indications] – *Calculer* –

1. Déterminer si possible la matrice de u dans une base choisie (On admettra que l'application u est linéaire).
   a) $u:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3&\longrightarrow&\mathbb{R}^2\\ (x,y,z)&\longmapsto&(\pi x-z, x+2y)\end{array}$
   b) $u:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}^4\\ P&\longmapsto&P(0)(-1,2,0,-1)+(P(1)-P'(0))(0,1,-2,-1)\end{array}$
   c) $u:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}_4[X]\\ P&\longmapsto&(X^2+2)P'-3XP\end{array}$
   d) $u:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}^{n+1}\\ P&\longmapsto&(P(0),P(1),\dots,P(n))\end{array}$
   e) $u:\ \begin{array}{ccc}\mathcal{C}^1(\mathbb{R})&\longrightarrow&\mathcal{C}^0(\mathbb{R})\\ f&\longmapsto&f'\end{array}$

2. Dire, dans chaque cas, si l'application linéaire est injective / surjective / bijective ? Puis déterminer $\mathrm{Im} u$ et $\ker u$ de la manière la plus rapide possible si ce n'est pas déjà fait.

Exercice 6: [Indications] *(ENS)* – *Raisonner* – ☆
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E. ☆
2. En déduire une matrice de φ et $\mathrm{rg}\, \varphi$.

Exercice 7: [Indications] – *Calculer* – Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, et λ un paramètre réel. Soit φ un endomorphisme de E défini par $\left\{\begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) & = & e_1 + \lambda e_3 \end{array}\right.$

1. Quelle est l'image de $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ par φ.
2. Comment choisir λ pour que φ soit surjective ? injective ?

Exercice 8: [Indications] – *Calculer* – On considére les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, 2x + y, y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + z, 5x - 2y + z) \end{array}$$

1. On admet que f, g sont linéaires. Donner leur noyau et leur image.
2. Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. Qu'en est-il de $f \circ g$?

Exercice 9: [Indications] – *Calculer* – *Raisonner* –
Soit $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$.
Montrer que φ est un endomorphisme et préciser une base de son noyau.

Exercice 10: [Indications] – *Calculer* – *Raisonner* – On considére l'application
$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x - y, -4x + 2y) \end{array}$

1. u est-elle linéaire ?
2. a) Donner son noyau.
   b) Quel est le rang de u ?
   c) u est-elle surjective ?
   d) Déterminer $\mathrm{Im}\, u$.
3. Reprendre l'exercice avec $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, -x - y) \end{array}$. Déterminer dans ce cas $u^2 = u \circ u$ sans faire de calculs supplémentaires. ☆

Exercice 11: [Indications] – *Raisonner* –
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ où a est un nombre complexe donné non nul.

1. Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 12: [Indications] – *Raisonner* –
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id} = 0$.
Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 13: [Indications] – *Raisonner* – ☆☆
Soit $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $U : E \to E$ définie par $f \mapsto U(f)$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt. \\ \text{et } U(f)(0) = f(0). \end{cases}$$

1. Montrer que $U \in L(E)$.
2. Déterminer $\ker U$ et $\mathrm{Im}\, U$.
3. Donner un exemple de fonction dans $\mathrm{Im}\, u$ qui n'est pas dans $\mathcal{C}^1([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et en donner un antécédent.

Changement de base

Exercice 14: [Indications] – *Calculer* –

1. Soient $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, ainsi que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que
$$M(f)_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   a) Déterminer $M(f)_{\mathcal{B}_2', \mathcal{B}_3}$ où $\mathcal{B}_2' = \{(1, 0)_{\mathcal{B}_2}, (-1, 1)_{\mathcal{B}_2}\}$.
   b) Déterminer $M(f)_{\mathcal{B}_2', \mathcal{B}_3'}$ où $\mathcal{B}_3' = \{(1, -1, 1)_{\mathcal{B}_3}, (-1, -1, 1)_{\mathcal{B}_3}, (0, 2, 0)_{\mathcal{B}_3}\}$.
   c) En déduire $\ker f$.
2. a) Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel E et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que
$$M(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Déterminer la matrice de f dans a base $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, (-1, 1, 0)_{\mathcal{B}}, (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}\}$
   b) En déduire l'expression de f^n dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 15: [Indications] – *Calculer* – ☆
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\ker(u) = \mathrm{Vect}\{X^2 - X, X^2 + 1\}$ et $u(2 + X) = 1 + X$.

1. Choisir deux bases adéquates $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ respectivement dans l'espace de départ et d'arrivée afin de pouvoir constituer facilement la matrice de u dans ces bases. On la note $M_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(u)$.
2. En déduire l'image par u de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 16: [Indications] *– Calculer –*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ la base canonique, $\mathcal{B}_1 = \{1 + X^2, X + 2X^2, 1 + 3X^2\}$ une autre base (admis) de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1$.

Pour aller un peu plus loin

Exercice 17: [Indications] *(ENS)* ☆☆

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et Δ l'endomorphisme de E déterminé par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Justifier que l'endomorphisme Δ est nilpotent (c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^m = 0$.)

2. Déterminer des réels $a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}$ non triviaux vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X+k) = 0$$

(ind : écrire $\Delta = T - Id$ où $T : P(X) \mapsto P(X+1)$.)

Exercice 18: [Indications] *(ENS)* ☆☆

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $\{\vec{x}, f(\vec{x})\}$ est liée.

a) Montrer que si $\vec{x} \neq \vec{0}$, il existe un unique scalaire $\lambda_{\vec{x}}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x}$.

b) Comparer $\lambda_{\vec{x}}$ et $\lambda_{\vec{y}}$ lorsque $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre.

c) Montrer que f est une homothétie (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$.) ☆

2. Montrer que si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tous les endomorphismes de E, f est une homothétie. ☆☆

Indications

Exercice 6

1. Prendre une combinaison linéaire nulle et l'évaluer par φ^{n-1}.

Exercice 12

Se souvenir que $f : E \to E$ est inversible ssi il existe une application g telle que $f \circ g = g \circ f = Id$.

Exercice 15

1. $\ker u$ est dans "l'espace de départ", tout comme $2 + X$. En revanche, $1 + X$ est dans "l'espace d'arrivée."

Exercice 16

Avant de s'attaquer à la forule matricielle, se pose la questioin de la détermination directe.

Exercice 18

1. **b)** faire intervenir $\vec{x} + \vec{y}$ pour montrer que $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$

c) Montrer que pour $(\vec{x}, \vec{y})$ est liée on a aussi $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$