FEUILLE 7 - Intégration

Primitives et Intégrale sur un segment

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] – *Mobiliser* – Primitives classiques

f désigne une fonction définie et continue sur un domaine de définition et d'intégration maximal $\mathcal{D}_f$ et F une primitive de f sur $\mathcal{D}_f$. Remplir le tableau.

$f(x)$	$F(x)$	$\mathcal{D}_f$
$x^\alpha, \ \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \geqslant 0$ et $\mathbb{R}^*$ sinon
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x, \quad a>0, a\neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{b+x^2}}, b>0$	$\ln(x + \sqrt{b+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}, \ a\neq 0$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}, \ a\neq 0$	$\dfrac{1}{2a}\log\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert$	$\mathbb{R} - \{\pm a\}$

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Changement de variable dans une intégrale

Soit $a > 0$. On considère

$$I = \int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

1. Par changement de variable $t = \frac{1}{x}$, montrer que $I = -I$.
2. En déduire la valeur de I.

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] – *Calculer* – PPP et Changement de variable dans une primitive

On pose ici la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(t) = \cos\sqrt{t-1}.$$

1. À l'aide d'une primitivation par partie, montrer pour commencer que sur $\mathbb{R}$:

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x$$

2. En déduire ensuite, par un changement de variable en $x = \sqrt{t-1}$ une primitive de f.

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Fractions rationnelles $\frac{1}{\text{"degré 2"}}$

L'objet de cet exercice est de déterminer une primitive ou intégrale de chaque fraction demandée.

1. Soit
$$f(x) = \frac{1}{4x^2+4x+1}$$
   a) Montrer que le dénominateur s'écrit sous forme $(\alpha x+\beta)^2$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   b) En déduire le domaine de continuité de f ainsi qu'une primitive de f.
2. Soit
$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$$
   a) Décomposer le dénominateur en produit de facteurs irréductibles.
   b) En déduire que $f(x)$ s'écrit
$$f(x) = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$$
   avec $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.
   c) En déduire une primitive de f sur son domaine de continuité.

3. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$$

a) Exprimer le dénominateur sous la forme canonique du polynôme et vérifier que f est ainsi bien définie.

b) En déduire $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f$.

Exercice 5: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Fractions rationnelles $\frac{P}{\text{"degré 2"}}$

1. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \frac{4x+3}{x^2+3}$$

a) Chercher un polynôme α $\alpha\frac{(x^2+3)'}{x^2+3} + \frac{\beta}{x^2+3}$.

b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+3}$$
☆

a) Transformer l'écriture de $f(x)$ en "polynôme" $+ \alpha\frac{(x^2+3)'}{x^2+3} + \frac{\beta}{x^2+3}$.

b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$ en s'inspirant des méthodes précédentes.

3. Soit, pour $x > 2$:
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$$
☆

a) Écrire $f(x)$ sous la forme $\alpha x + \frac{bx+c}{x^2-4}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

4. Soit
$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-2x+4}$$
☆☆

S'inspirer de toutes les méthodes précédentes pour déterminer une primitive de f sur son domaine de continuité.

Exercice 6: [Indications] [Correction]

1. n entier, $n \geqslant 2$, Primitive de $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$

a) On note I_n la primitive de $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ s'annulant en 0. Montrer que ☆
$$I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

b) En déduire une primitive de $\frac{1}{(x^2+a^2)^2}$, $a \neq 0$.

c) En déduire une primitive de $\frac{x}{(x^4+1)^2}$

Exercice 7: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Polynômes et Fractions rationnelles en cos, sin.

Déterminer

1. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx.$

3. $\displaystyle\int (\tan x + 1)^2 dx$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ sur $x \in]0, \pi[$. ☆

Exercice 8: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Changement de variable

Par le changement de variable suggéré, déterminer

1. $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$ (changement de variable $u = \sqrt{e^x-1}$)

2. Une primitive de $\frac{1}{3+e^{-x}}$, avec son domaine de validité (changement de variable $t = e^x$.)

Exercice 9: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Sommes de Riemann

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ ☆

Exercice 10: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Raisonner* – ☆☆

On cherche à trouve l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$

1. Écrire la somme sous la forme d'une somme de Riemann et expliciter une fonction f telle que
$$n\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. La fonction f trouvée est-elle continue sur $[0, 1]$? Peut-on appliquer les sommes de Riemann ?

3. Déterminer une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[0, 1]$ telle que
$$n\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{f}\left(\frac{k}{n}\right)$$

4. Conclure quant à la problématique.

Exercice 11: [Indications] [Correction] ☆

Déterminer la limite de $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – *Chercher* – *Calculer* – ☆☆
Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Chercher $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k$.

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Chercher* – Approximation par la méthode des rectangles ☆☆

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   On pose $I_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+(b-a)\dfrac{k}{n}\right)$.
   Montrer que
   $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - I_n\right| \leq M\cdot\frac{(b-a)^2}{2n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad \text{où } M=\sup_{[a;b]}|f'|$$
2. Application : déterminer un nombre à un chiffre après la virgule qui soit une valeur approchée de $\ln 2$ à 0,1 près.

Intégrale généralisée

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Calcul direct
Étudier la convergence puis calculer, en cas de convergence, les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,\ \alpha\in\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,\ \alpha\in\mathbb{R}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,\ \alpha\in\mathbb{R}$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t.$
7. $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t-2}}$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (2x^2-x)e^{-3x}\,\mathrm{d}x.$

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] – *Chercher* – *Calculer* –
Étudier la convergence puis calculer, en cas de convergence, les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{|t|}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ☆
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{2+|\sin t|}\,\mathrm{d}t$ ☆

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Les changements de variable
Étudier la convergence puis calculer, en cas de convergence, les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $u=\sqrt{t}$.
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $u=\sqrt{1-t}$
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t}-5e^t+6}\,\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $u=e^t$.
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\,\mathrm{d}x.$

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] – *Chercher* – étudier la convergence des intégrales ci-dessous

1. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin t - t}{t(\cos t-1)}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t,\quad \alpha>1$ ☆☆
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^3-t^2+1}}\,\mathrm{d}t$ ☆☆
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(1-e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}}\right)\mathrm{d}t.$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$

EXERCICE 18: [Indications] [Correction] – *Chercher* – *Mobiliser* – *Calculer* – Pour $a\in\mathbb{R}^*$, $b>0$, étudier la convergence et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(at)e^{-bt}\,\mathrm{d}t$

EXERCICE 19: [Indications] [Correction] – *Chercher* – ☆
Déterminer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 0, x>0} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$$

Exercice 20: [Indications] [Correction] – *Chercher* – *Calculer* – *(ENS)*

1. étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ ☆

2. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21: [Indications] [Correction] – *Chercher* – *(ENS)* ☆☆

Soit f une fonction continue sur $[a;b[$, où $a,b \in \bar{\mathbb{R}}$.
Soit g une fonction définie et non nulle au voisinage de b telle que

$$\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = \ell \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que, si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que, si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
3. *Application :* Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{\ln(t+1)} - \sqrt{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

Exercice 22: [Indications] [Correction] – *Chercher* – Comparaison série-intégrale

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante

1. Montrer que :

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, avec, en cas de convergence,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \geqslant \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

3. En cas de convergence, encadrer le reste $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f.

4. *Application :* Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent pour $n \to \infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Indications

Exercice 4 [Correction]

1. **b)** Reconnaître une formue usuelle.

2. **b)** On se sert des racines a, b trouvées dans la question précédente

Exercice 6 [Correction]

1. **c)** Un changement de variables $u = x^2$ fonctionne très bien.

Exercice 7 [Correction]

• En cas de polynôme en sin et cos, on peut simplifier les expression, notamment grâce à la linéarisation de cos et sin.

•En cas de fraction rationnelles $R(\cos x, \sin x)$, si les formules de trigonométrie ne permettent pas de s'en sortir rapidement, il existe quelques "règles" pratiques pour tenter de siplifier les calculs, les **"règles de Bioches"** (HP) :

. Si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par le changement $x \to \pi - x$, on tente le changement de variables $u = \sin x$.
. Si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par le changement $x \to -x$, on tente le changement de variables $u = \cos x$.
. Si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par le changement $x \to x + \pi$, on tente le changement de variables $u = \tan x$.
. Sinon, on pourra tenter le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$. En effet, dans ce cas, on $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

4. On pourra poser $u = \cos(x)$ et observer que $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ si sin est positif.

Exercice 9 [Correction]

2. On pensera d'abord à manipuler ce produit pour en déduire une somme de Riemann à calculer.

   Ensuite, pour le calcul de l'intégrale, on pensera à faire une IPP afin de transformer en calcul d'intégrale de fraction rationnelle.

Exercice 11 [Correction]

On pourra penser à encadrer $\mathbb{E}(\sqrt{k})$ par les valeurs "simples" les plus proches sans partie entière.

Exercice 12 [Correction]

Commencez par trouver la formule de la longueur du segment A_1A_k puis utilisez le théorème des sommes de Riemann

Exercice 13 [Correction]

2. $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 15 [Correction]

1. On peut tenter une IPP. (On réfléchira à ce qu'il vaut mieux dériver...)

Exercice 16 [Correction]

2. On pourra essayer un changement de variable pour se débarrasser se la racine.
3. On pourra essayer un changement de variable pour se transformer le dénominateur en polynôme.

Exercice 17 [Correction]

3. On pourra majorer $\ln t$ par un t^β en choisissant β de manière judicieuse.

Exercice 20 [Correction]

1. On pourra tenter une IPP pour le cas le plus problématique.
2. Un changement de variable peut s'avérer utile, pour se ramener au cas de la question 1.

Exercice 2

1. Avec $t = \frac{1}{x}$ qui est un changement de variable $\mathcal{C}^1$ sur le domaine d'intégration, on a

$$x = \frac{1}{t}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} x & 1/a & \ln a \\ \hline u & a & 1/a \end{array}$$

et donc, par changement de variable, si on note

$$I = \int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

on a

$$I = -\int_{a}^{1/a} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}+1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{1/a} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -I$$

2. De la question précédente, on tire Ainsi, $2I = 0$ et donc

$$\boxed{\int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0}$$

Exercice 3

1. On pose u, v deux fonctions $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\begin{cases} u(x) = x & v'(x) = \sin x \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\cos x \end{cases}$$

Alors, par PPP, on a

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int uv' = [uv] - \int u'v = x\sin x + \cos x$$

2. En posant le changement de variable demandé, on constate qu'il est bien $\mathcal{C}^1$ et bijectif sur l'intervalle demandé avec

$$t = 1 + u^2$$

d'où

$$\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$$

Ainsi, par changement de variable :

$$\int f = \int (2u)\cos u\,\mathrm{d}u$$

ce qui donne, d'après la première question :

$$\int f = 2(u\sin u + \cos u)$$

et donc, pour conclure :

$$\boxed{\int \cos\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{t-1}\sin\left(\sqrt{t-1}\right) + 2\cos\left(\sqrt{t-1}\right)}$$

Exercice 4

1. $f(x) = \dfrac{1}{4x^2+4x+1}$:

   a) $\Delta = 0$. Par recherche de racine, on a ensuite

$$\boxed{4x^2+4x+1 = (2x+1)^2.}$$

   b) Par formule usuelle du type $cste.\frac{u'}{u^2}$, on a

$$\boxed{\int \frac{1}{4x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2x+1)}}$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$:

   a) La recherche de racine d'un polynôme de degré 2 donne :

$$\boxed{x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)}$$

b) Par résolution de système, on trouve

$$\boxed{\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}.}$$

c) Directement, par primitive usuelle sur chaque membre de la somme :

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x=\ln|x-3|-\ln|x-2|=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|}$$

3. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$:

a) On a $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1$ d'où

$$\boxed{x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

b) Grâce à la question précédente :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx=\frac{4}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

Le changement de variable $u=\dfrac{2(x+\frac{1}{2})}{3}$ donne

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,du=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan u\right]_0^{\frac{2}{3}}$$

D'où

$$\boxed{\int\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{3}}$$

Exercice 5

1. $f(x)=\dfrac{4x+3}{x^2+3}$:

a) On a

$$\frac{4x+3}{x^2+3}=2\underbrace{\frac{2x}{x^2+3}}_{\text{forme }\frac{u'}{u}}+3\underbrace{\frac{1}{x^2+3}}_{\text{forme dérivée de arctan}}$$

b) De la question précédente on déduit

$$\int\frac{4x+3}{x^2+3}\,\mathrm{d}x=2\ln|\underbrace{x^2+3}_{>0}|+\frac{3}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}})$$

Conclusion :

$$\boxed{\int\frac{x^2+x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x=2\ln(x^2+3)+\sqrt{3}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}})\text{ sur }\mathbb{R}}$$

2. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+3}$:

a) On a

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x}{x^2+3}&=\frac{x^2+3}{x^2+3}+\frac{x-3}{x^2+3}\\&=1+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{2x}{x^2+3}}_{\text{forme }\frac{u'}{u}}-3\underbrace{\frac{1}{x^2+3}}_{\text{forme dérivée de arctan}}\end{aligned}$$

b) De la question précédente, on tire

$$\int\frac{x^2+x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\ln|\underbrace{x^2+3}_{>0}|-\frac{3}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}})$$

Conclusion :

$$\boxed{\int\frac{x^2+x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\ln(x^2+3)-\sqrt{3}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}})\text{ sur }\mathbb{R}}$$

3. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$:

a) On met en valeur le dénominateur dans le numérateur afin de simplifier la fraction :

$$\frac{x^3}{x^2-4}=\frac{x(x^2-4+4)}{x^2-4}=\frac{x(x^2-4)}{x^2-4}+\frac{4x}{x^2-4}=x+\frac{4x}{x^2-4}$$

Ce qui s'intègre directement car le deuxième terme de la somme est à constante près sous la forme $\frac{u'}{u}$. D'où

$$\boxed{\int\frac{x^3}{x^2-4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+2\ln|x^2-4|}$$

4. Sachant que le degré du numérateur est égal à "degré du dénominateur -1", on met tout d'abord en valeur une forme $\frac{u'}{u}$. Comme "$u' = 2x - 2$", on dit que

$$3x = \frac{3}{2}(2x - 2 + 2)$$

puis :

$$\begin{aligned}
\frac{3x+1}{x^2-2x+4} &= \frac{\frac{3}{2}(2x-2+2)+1}{x^2-2x+4} \\
&= \frac{\frac{3}{2}(2x-2)}{x^2-2x+4} + \frac{\frac{3}{2}\cdot 2+1}{x^2-2x+4} \\
&= \frac{3}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+4} + \frac{4}{x^2-2x+4}
\end{aligned}$$

Or, sur le domaine de non nullité de $x^2 - 2x + 4$, on a

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2 - 2x + 4|$$

Calculons une primitive du second membre. Pour ceci, notons que le discriminant du dénominateur est

$$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$$

Le coefficient devant x^2 étant positif, on obtient au passage que ce polynôme est toujours strictement positif. Sa forme canonique est

$$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 - 1 + 4 = (x-1)^2 + 5$$

Donc, avec $t = x - 1$,

$$\int \frac{4}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{(x-1)^2+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{t^2+5}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)$$

D'où au final une primitive sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\int \frac{3x+1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2-2x+4) + \frac{4}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{5}}\right)}$$

Exercice 6

1. a) $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,dt = \int_0^x \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{1}{(t^2+a^2)^n}}_{v}\,dt$ d'où

$$I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \int_0^x \frac{2nt^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \int_0^x \frac{2n(t^2+a^2) - 2na^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt$$

On reconnait

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}}$$

b) D'après la question précédente, pour $n = 1$, on a

$$I_2 = \frac{x}{(x^2+a^2)} + 2I_1 - 2a^2 I_2$$

Or, $I_1 = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$, ainsi,

$$\boxed{(1+2a^2)I_2 = \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{2}{a}\arctan\frac{x}{a}}$$

c) **Primitive de $\dfrac{x}{(x^4+1)^2}$:**

On cherche $\displaystyle\int^x \frac{t}{(t^4+1)^2}\,\mathrm{d}t$:

On pose $u = t^2$, on a alors $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$ avec $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, d'où

$$\int^x \frac{t}{(t^4+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^{x^2} \frac{1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u$$

et donc, d'après la question précédente avec $a = 1$:

$$\int \frac{x}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1+2a^2)}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{2}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)$$

i.e.

$$\boxed{\int \frac{x}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left(\frac{x}{x^2+1} + 2\arctan x\right)}$$

Exercice 7

1. Il s'agit d'une forme $\frac{u'}{u^2}$, on peut donc facilement avoir

$$\boxed{\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}}$$

2. • <u>Méthode 1 :</u>

On peut par exemple procéder par IPP avec

$$u' = \sin^4(x)\cos(x) \qquad v = \cos^2 x$$
$$u = \frac{1}{5}\sin^5(x) \quad v' = -2\cos x \sin x$$

avec $u, v \in \mathcal{C}^1$ D'où

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx &= \frac{1}{5}\sin^5(x)\cos^2 x + \frac{2}{5}\int \sin^6 x \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{5}\sin^5(x)\cos^2 x + \frac{2}{5\times 7}\sin^7 x \\ &= \frac{1}{5}\sin^5(x)\left(\cos^2 x + \frac{2}{7}\sin^2 x\right) \\ &= \frac{1}{5}\sin^5(x)\left(1 - \sin^2 x + \frac{2}{7}\sin^2 x\right)\end{aligned}$$

i.e.

$$\boxed{\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{5}\sin^5(x)\left(1 - \frac{5}{7}\sin^2 x\right)}$$

• <u>Méthode 2 :</u>

On peut linéariser l'expression $\sin^4 x \cos^3 x$:

$$\sin^4 x \cos^3 x = \frac{1}{64}\left(\cos(7x) - \cos(5x) - 3\cos(3x) + 3\cos(x)\right)$$

puis intégrer :

$$\boxed{\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\sin(7x) - \frac{1}{5}\sin(5x) - \sin(3x) + 3\sin(x)\right)}$$

3. On développe :

$$(\tan x + 1)^2 = \underbrace{\tan^2 x + 1}_{\tan'(x)} + 2 \underbrace{\tan x}_{-(\ln|\cos(x)|)'}$$

D'où

$$\boxed{\int (\tan x + 1)^2 dx = \tan x - \ln|\cos(x)|}$$

4. En posant $u = \cos x$, on a $u \in \mathcal{C}^1$ avec

$$\mathrm{d}u = -\sin x \, \mathrm{d}x$$

d'où

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\int^{\cos(x)} \frac{du}{\sin^2 x} = -\int^{\cos(x)} \frac{du}{1-u^2}$$

Or, on connait une primitive de $\dfrac{1}{1-u^2}$ qui est

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|$$

car $1 - u \neq 0$ sur l'intervalle donné. donc

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|}$$

Exercice 8

1. On pose $u = \sqrt{e^x - 1}$ un changement de variable $\mathcal{C}^1$ sur $x \in [0, \ln 2]$ (car $e^x \in [1,2]$ et donc $e^x - 1 \in [0,1]$.)
On a

$$x = \ln(u^2+1), \qquad \mathrm{d}x = 2u\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u, \qquad \begin{array}{|c|c|c|} x & 0 & \ln 2 \\ \hline u & 0 & 1 \end{array}$$

D'où

$$I = \int_0^1 u \cdot 2u \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\left(\int_0^1 \underbrace{\frac{u^2+1}{u^2+1}}_{=1}\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{12}{u^2+1\,\mathrm{d}u}\right)$$

D'où, par primitive usuelle,

$$I = 2 - 2(\arctan 1 - \arctan 0) = 2 - 2\frac{\pi}{4}$$

et donc

$$\boxed{\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = 2 - \pi/2}$$

2. Soit le changement de variable $u = \exp x$. Alors $x = \ln u$ et $du = \exp x \, dx$ ce qui s'écrit aussi $dx = \frac{du}{u}$.

$$\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx = \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}}\frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u+1}du = \frac{1}{3}\ln|3u+1| + c = \frac{1}{3}\ln(3\exp x + 1) + c$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{k}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n^2}}\end{aligned}$$

En posant alors $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ pour tout $x \in [0,1]$, on obtient f une fonction continue telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et on peut donc appliquer le théorème des sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or, ici

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

est une intégrale de fraction rationnelle qui se résoud facilement par

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= [\arctan x]_0^1 + \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

D'où finalement

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} &= e^{\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}\end{aligned}$$

En posant alors $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ pour tout $x \in [0,1]$, on obtient f une fonction continue telle que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et on peut donc appliquer le théorème des sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or, ici

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

qui n'est pas uné intégrale immédiatemant calculable par primitive usuelle. En revanche, en posant les fonctions $\mathcal{C}^1$ u, v telles que

$$\begin{array}{cc} u'(x) = 1 & u(x) = x \\ v(x) = \ln\left(1+x^2\right) & v'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\end{array}$$

On a

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u'v = [uv]_0^1 - \int_0^1 uv' = \underbrace{\left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1}_{=\ln 2} - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\int_0^1 \frac{x^2+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= 2\left(1 - [\arctan x]_0^1\right) \\ &= 2 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

D'où finalement

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = 2 - \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} &= n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{n^2\frac{k^2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{\frac{k^2}{n^2}} \end{aligned}$$

En posant alors $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ pour tout $x \in]0,1]$, on obtient f une fonction continue sur $]0,1]$ telle que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. Non, cette fonction n'est pas continue sur $[0,1]$, étant donné qu'elle n'est pas définie en 0. On ne peut donc pas appliquer directement les sommes de Riemann.
3. Si on observe la limite de f en $x \to 0$, on s'aperçoit que, par croissances comparées, si on pose $X = \frac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{X\to+\infty} X^2 e^{-X} = 0$$

On en déduit que f est prolongeable par continuité en 0. On pose $\tilde{f}$ le prolongement de cette fonction qui devient de ce fait continue sur $[0,1]$ et qui donne alors lieu au résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{f}\left(\frac{k}{n}\right)$$

4. On peut appliquer les sommes de Riemann à $\tilde{f}$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or, ici

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

qui est sous la forme $\int_0^1 u'e^u$ et convergente d'où

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_0^1 = e^{-1}$$

D'où finalement

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} = e^{-1}}$$

Exercice 11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$.

Pour $1 \le k \le n$, $\sqrt{k} - 1 \le E(\sqrt{k}) \le \sqrt{k}$, et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \le u_n \le \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, la somme de Riemann

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

tend vers $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$ car $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et que le théorème des gendarmes permet alors de conclure. i.e.

$$\boxed{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}}$$

Exercice 12

En faisant un petit schéma de la situation, on s'aperçoit que si O est le centre du cercle, l'angle $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_k})$ vaut $\theta_k = \frac{k-1}{n} \cdot 2\pi$.
On peut donc calculer la longueur du segment $[A_1A_k]$ car OA_1A_k est un triangle isocèle en O où OA_1 est de longueur 1. On constate alors que

$$A_1A_k = 2\sin\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)$$

D'où

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k = 2\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sin\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)$$

Un changement d'indice en $i = k-1$ donne

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k = 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\left(\frac{i}{n}\pi\right)$$

Le terme en $i = 0$ étant nul, on peut également écrire

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k = 2\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\left(\frac{i}{n}\pi\right)$$

En posant alors $f(x) = \sin(x\pi)$, f étant continue sur $[0,1]$, on est confronté à une somme de Riemann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k-1}{n}\pi\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or,

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(x\pi)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

D'où

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k = \frac{4}{\pi}}$$

Exercice 13

1. On note $x_k = a + (b-a)\dfrac{k}{n} \qquad \forall k = 0\ldots n-1$, de manière à avoir

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - I_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(x_k)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or, par théorème des accroissements finis, on a

$$\forall t \in [x_k; x_{k+1}], \qquad |f(t) - f(x_k)| \leqslant (x - x_k)\sup_{u\in[x_k;x_{k+1}]}|f'(u)| \leqslant M$$

En réinjectant dans l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - I_n\right| &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)M\,\mathrm{d}t\\
&= M\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(x-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}\,\mathrm{d}t\\
&= M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_{x+1}-x_k)^2}{2}\\
&= M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2}{2n^2}\\
&= M\cdot n\cdot\frac{(b-a)^2}{2n^2}\\
&= M\cdot\frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

C'est fini !

2. $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. On pose alors f la fonction inverse et on a

$$\ln 2 - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leqslant M\frac{1}{2n} \qquad \text{où } M = \sup_{[a;b]}|f'|$$

or, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, d'où

$$M = 1.$$

i.e.

$$\ln 2 - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}}_{I_n} \leqslant \frac{1}{2n}$$

On souhaite une valeur approchée à $0,1$ près. Commençons par chercher n tel que

$$\frac{1}{2n} \leqslant 0,1$$

ce qui donne

$$n \geqslant 5$$

Une valeur approchée de $\ln 2$ à $0,1$ près est donc

$$\begin{aligned}
\ln 2 &\simeq \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{1+\frac{k}{5}}\\
&\simeq \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}+\frac{1}{1+\frac{2}{5}}+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}+\frac{1}{1+\frac{4}{5}}\right)\\
&\simeq \frac{1}{5}\left(1+\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\frac{5}{8}+\frac{5}{9}\right)\\
&\simeq \frac{1879}{2520} \simeq 0,7456
\end{aligned}$$

mais **cette valeur n'est pas exacte.** Il faut encore approximer l'approximation ! *Comment être alors certain que l'on ne rogne pas sur la précision ?* Et bien, il faut être plus fin dans le raisonnement.

On sait donc avec certitude que

$$\ln 2 \in [\frac{1879}{2520} - 0,1; \frac{1879}{2520} + 0,1] \simeq [0,646, 0,846]$$

mais attention, n'importe quelle valeur dans cet intervalle n'est qu'une approximation à 0,2 près !. Pour être certain d'avoir une approximation à $0,1$ près, il faut obtenir une valeur I_n telle que

$$\ln 2 \in [I_n - 0,05, I_n + 0,05]$$

autrement dit, il va falloir

$$\frac{1}{2n} \leqslant 0,05$$

et donc

$$n \geqslant 10$$

le valeur de I_n sera donc, pour $n = 10$

$$I_n = \frac{33\,464\,927}{46\,558\,512} \simeq 0,719$$

Une valeur à $0,1$ près de $\ln 2$ sera donc n'importe quelle valeur dans $[I_n - 0,05; I_n + 0,05]$, c'est-à-dire, ici,

$$\boxed{\ln 2 \simeq 0,7}$$

Remarque : Vraie valeur de $\ln 2$:

$$\ln 2 \simeq 0,693147\ldots$$

Exercice 14

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]1,+\infty[$ Pb en $+\infty$. Par calcul, on trouve
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge ssi } \alpha > 1$$
2. Pb en 0. Par calcul, on trouve
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge ssi } \alpha < 1$$
3. En coupant en 2 et en utilisant les résultats précédents, on trouve que cette intégrale diverge quel que soit α.
4. Pb en $+\infty$. Il y a convergence :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \big[\arctan t\big]_0^x = \frac{\pi}{2}$$
5. Pb en $+\infty$. Il y a divergence :
$$\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
6. $t^2+2t+2 = (t+1)^2+1$. une primitive de $\frac{1}{(t+1)^2+1}$ étant $\arctan(t+1)$, on trouve
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t = \pi}$$
7. Pb en 0. Converge en revenant à la définition :
$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} \big[t\ln t - t\big]_x^1 = -1$$
8. Pb en 1 et $+\infty$. En revenant à la définition, elle diverge :
$$\int \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}t = \ln|u|$$
où $u = \ln t$.
9. Pb en $\dfrac{\pi}{2}$.
Elle se présente sous la forme
$$\int \tan(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}t = -\ln|u|$$
i.e.
$$\int \tan t\,\mathrm{d}t = -\ln|\cos t|$$
L'intégrale va diverger car $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln|\cos x| = \infty$.
10. Simple forme $u'u^{\frac{2}{3}}$. On trouve
$$\boxed{\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t-2}} = -\frac{3}{2}}$$
11. ...

Exercice 15

1. Pb en 0 et $+\infty$.
Par IPP, elle diverge.
2. Pb en 0.
La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{|t|}$ est prolongeable par continuité en 0. L'intégrale est donc convergente. De plus, c'est une fonction impaire sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. On a donc
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{|t|}\,\mathrm{d}t = 0$$

3. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Convergence : En 0, elle est faussement impropre.

En $+\infty$, il faudrait travailler un peu plus. Voyons si on peut obtenir le résultat par IPP.

- Calcul :

On fait une IPP

$$\begin{array}{ll} u = \ln(1+t^2) & u' = \frac{2t}{1+t^2} \\ v' = \frac{1}{t^2} & v = -\frac{1}{t} \end{array}$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0 :$$

car

$$u(x)v(x) = \frac{\ln\left(t^2(1+\frac{1}{t^2}\right)}{t} = 2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}\underbrace{\ln(1+\frac{1}{x^2})}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0 \quad \text{car } u(x)v(x) \underset{0}{\sim} -t$$

D'où, par IPP, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\, dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{2}{1+t^2}}_{g(t)}\, \mathrm{d}t$.

Or, cette intégrale est convergente. En effet, g est continue sur $[0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\int_0^x \frac{2}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = 2\left[\arctan t\right]_0^x = 2\arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi$$

D'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v$ et donc celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'$, avec, par IPP

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\, \mathrm{d}t &= \left[-\frac{\ln(1+t^2)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \\ &= 0 + \pi \end{aligned}$$

i.e

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\, dt = \pi}$$

4. Pb en $\pm\infty$, mais la fonction est impaire. Il suffit donc de vérifier la convergence en $+\infty$, où

$$\frac{te^{-t^2}}{2+|\sin t|} \leqslant \frac{te^{-t^2}}{2}$$

l'intégrale du membre de droite est convergente. On a donc concergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{2+|\sin t|}\, \mathrm{d}t$, puis $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{2+|\sin t|}\, \mathrm{d}t$.
Ensuite, par imparité, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{2+|\sin t|}\, \mathrm{d}t = 0$$

Exercice 16

1. Pour la convergence, seul pb en $+\infty$. Grâce au changement de variable $u = \sqrt{t}$, on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\, dt = 2\int_0^{+\infty} u^3e^{-u}\, du = 12$

2. Par changement de variable $u = \sqrt{1-t}$, on obtient l'intégrale de même nature que (et en cas de convergence égale à)

$$2\int_0^1 \ln(1-u^2)\, \mathrm{d}u$$

puis $\ln(1-u^2) = \ln(1-u) + \ln(1+u)$ donne

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\, \mathrm{d}t = 4\ln 2 - 4}$$

3. Changement de variable $u = e^t$: $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t} - 5e^t + 6}\, \mathrm{d}t$ de même nature que $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, \mathrm{d}t$.
Cette dernière intégrale est convergente et on obtient sa valeur par décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

comme $[e^2; +\infty[$ ne contient pas 2 et 3, une primitive de $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ est donc

$$x \mapsto \ln(x-3) - \ln(x-2) = \ln \frac{x-3}{x-2}$$

On trouve la convergence de

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, \mathrm{d}t = \ln \frac{e^2 - 3}{e^2 - 2}$$

Donc finalement, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t} - 5e^t + 6}\, \mathrm{d}t$ converge et

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t} - 5e^t + 6}\, \mathrm{d}t = \ln \frac{e^2 - 3}{e^2 - 2}}$$

4. Le terme de l'intégrale s'écrit

$$\begin{aligned} e^{-x^2+2x} &= e^{-(x-1)^2+1} \\ &= e^1 e^{-\frac{1}{2}\left(2(x-1)^2\right)} \\ &= e^1 e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x - \sqrt{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Un changement de variable $u = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$ $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant avec

$$\mathrm{d}u = \sqrt{2}\, \mathrm{d}x$$

et les changement de borne

x	$-\infty$	$+\infty$
u	$-\infty$	$+\infty$

permet de dire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\, \mathrm{d}x = \frac{e}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, \mathrm{d}u$$

Or, d'après le cours, l'intégrale de droite est convergente, celle de gauche l'est donc aussi. De plus, on connait la valeur de celle de droite, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\, \mathrm{d}x = \frac{e}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi}$$

D'où

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x}\, \mathrm{d}x = e\sqrt{\pi}}$$

Exercice 17

1. Pb en 0, avec

$$\frac{\sin t - t}{t(\cos t - 1)} \sim \frac{-\frac{t^3}{6}}{-\frac{t^3}{2}} = \frac{1}{3}$$

la fonction est prolongeable par continuité, elle est faussement divergente, donc convergente.

2. Pb en $+\infty$.

$$\frac{1}{1 - t^4} \sim \frac{-}{1} t^4$$

où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4}\, \mathrm{d}t$ est convergente. Il y a donc convergence.

3. Pb en $+\infty$.

On sait que, quelquesoit $\beta > 0$, il existe $X_\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \geqslant X_\beta, \qquad \ln t \leqslant t^\beta$$

d'où,

$$\forall t \geqslant X_\beta, \qquad 0 \leqslant \frac{\ln t}{t^\alpha} \leqslant t^{\beta-\alpha}$$

En choisissant $\beta - \alpha > 1$, on a majoré par le terme général d'une intégrale convergente et on obtient donc

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

4. On a

$$t^3 - t^2 + 1 \leqslant t^3$$

pour t assez grand (à faire) D'où

$$\frac{t}{\sqrt{t^3-t^2+1}} \geqslant \frac{t}{\sqrt{t^3}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ diverge, il en va de même pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^3-t^2+1}}\,\mathrm{d}t$.

5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(1 - e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}}\right)\,\mathrm{d}t$. :

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}} - 1 \sim -\frac{1}{\sqrt{t}}$$

d'où

$$0 \leqslant 1 - e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}} \sim \frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

on en déduit la convergence car l'intégrale de $\frac{1}{t\sqrt{t}}$ est convergente en l'infini.

6. Pb en $+\infty$. Utiliser $\sin t \geqslant -1$. Elle diverge.

Exercice 18

La convergence résulte d'une majoration :

$$\left|\cos(at)e^{-bt}\right| \leq e^{-bt}$$

La valeur est ensuite issue d'une IPP On a

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos(at)e^{-bt} = \frac{b}{a^2+b^2}}$$

Exercice 19

La fonction considérée est continue sur $[x, 2x]$. Il n'y a donc pas de problème de convergence.

Le changement de variable $\mathcal{C}^1$ $t = xu$ donne lieu aux modifications suivantes :

$$\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$$

t	x	$2x$
u	1	2

D'où

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} = \int_1^2 \frac{\cos(xu)}{u}\,\mathrm{d}u$$

On fait ensuite une intégration par partie en posant :

$$\begin{cases} w(u) = \cos(xu) & w'(u) = -x\sin(xu) \\ v'(u) = \frac{1}{u} & v(u) = \ln u \end{cases}$$

D'où

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} = [\cos(xu)\ln u]_1^2 + \underbrace{x\underbrace{\int_1^2 \sin(xu)\ln u\,\mathrm{d}u}_{constante}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$$

Or

$$[\cos(xu)\ln u]_1^2 = \cos(2x)\ln 2 \xrightarrow[x\to 0]{} \ln 2$$

EN conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to 0, x>0} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,dt = \ln 2}$$

Exercice 20

1. $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0;+\infty[$. On a donc deux problèmes éventuels de convergence, en 0 et $+\infty$.

- Problème en 0 :

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 par 1. L'intégrale est donc faussement impropre en 0.

- Problème en $+\infty$:

étudions $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Par IPP, avec les fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1$ telles que

$$\begin{array}{ll} u(t) = \frac{1}{t} & u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) = \sin t & v(t) = -\cos t \end{array}$$

comme

$$\lim_{x \to +\infty} u(x)v(x) = 0$$

on obtient l'équivalence des convergences de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Or,

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente (le calculer). Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Finalement,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$$

2. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\,\mathrm{d}t$, on pose le changement de variable $u(t) = e^t$, où u est bien monotone de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.
On obtient alors l'équivalence de la convergence avec celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$, qui est bien convergente d'après la question précédente. En conclusion,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$$

Exercice 21

1. • *Supposons que g soit positive au voisinage de b et que* $\lim \dfrac{f(t)}{g(t)} = \ell > 0$.

Alors il existe T tel que, pour tout $t \geq T$, on a

$$\frac{1}{2}\ell \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{3}{2}\ell \qquad g(t) \geq 0$$

autrement dit, comme g est positive,

$$0 \leq g(t)\frac{1}{2}\ell \leq f(t) \leq \frac{3}{2}\ell g(t)$$

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives permet de conclure.

• *Autres cas :* Qu'on ait $\ell < 0$ ou g négatif au voisinage de b, on peut se ramener au cas précédent on posant $G = -g$.

Exercice 22

1. Repose simplement sur

$$f(t) \leqslant f(k) \qquad \text{si } t \geqslant k$$

et

$$f(t) \geqslant f(k) \qquad \text{si } t \leqslant k$$

par décroissance de f. Ensuite, on intègre et on trouve le résultat.

2. On constate, en additionnant les termes k allant de 1 à m dans l'inégalité de droite de la question précédente, que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{m} f(k) \geqslant \int_0^m f(t)\,\mathrm{d}t$$

• Ainsi, si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} f(k)$ converge, comme elle est positive, elle est majorée par sa limite, d'où

$$\int_0^m f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{m} f(k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$$

De plus, si $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante car f est positive. On a donc

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$$

C'est donc une fonction croissante et majorée, donc convergente.

• Si l'intégrale est convergente, on utilise l'inégalité de gauche...