Feuille 5 – Révisions d'équations différentielles linéaires

Ordre 1

Exercice 1: [Indications] [Correction] – *Calculer* –
Résoudre sur I les équations différentielles suivantes :

1. $2xy' + y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ avec $I =]0; +\infty[$.
2. $(x-1)^3 y' - (x-1)^2 y = 1$ avec $I =]1; +\infty[$.

Exercice 2: [Indications] [Correction] On considère l'équation

$$y' \sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0 \text{ sur } I =]0; \pi[$$

1. Montrer que la fonction cos est une solution particulière de l'équation.
2. Déterminer les solutions de l'équation homogène.
3. En déduire l'ensemble de toutes les solutions.

Exercice 3: [Indications] [Correction] On s'intéresse à l'équation $3xy' - 4y = 0$ sur $I =]0; +\infty[$.

1. Résoudre l'équation homogène $3xy' - 4y = 0$ sur I.
2. Sous quelle forme peut-on proposer de trouver une solution particulière de $3xy' - 4y = x$?
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $3xy' - 4y = 0$ sur $I =]0; +\infty[$.
4. Résoudre de la même manière

$$y' + 2y = x^2 - 2x + 3 \text{ avec } I = \mathbb{R}.$$

Exercice 4: [Indications] [Correction] Les conditions initiales

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution φ à l'équation $2xy' + y = x^n$ sur $I =]0, +\infty[$ telle que $\varphi(1) = a$. La déterminer.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de

$$(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$$

sur $I =]-1; +\infty[$ dont la courbe passe par le point $(0,0)$

Exercice 5: [Indications] [Correction] Autre intervalle – *Calculer* – *Modéliser* – *Raisonner* – ☆
Résoudre sur J les équations ci-dessous. *(On pourra tenir compte du fait que ces équations on déjà été résolues sur un autre intervalle.)*

1. $2xy' + y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ fixé où $J =]-\infty; 0[$.
2. $(x-1)^3 y' - (x-1)^2 y = 1$ où $J =]-\infty; 1[$.
3. $3xy' - 4y = x$. où $J =]-\infty, 0[$.

Exercice 6: [Indications] [Correction] Entrainement supplémentaire – *Calculer* – *Raisonner* –
Résoudre les équations suivantes sur I :

1. $x^3 y' - x^2 y = 1$. où $I =]0, +\infty[$.
2. $xy' + y = \cos x$ où $I =]0; +\infty[$.
3. $x(x^2-1)y' + 2y = x\ln x - x^2$ où $I =]0; 1[$ ☆

.

Exercice 7: [Indications] [Correction] Changement de fonction – *Calculer* – *Raisonner* –

1. Trouver l'ensemble des fonctions z, définie sur l'intervalle le plus grand possible et ne s'annulant jamais telles que

$$z' = z^2 + 2z.$$

(*Indication :* Poser $w = 1/z$)
2. Résoudre $y' = (y-x)^2$. (*Indication :* Trouver une solution polynomiale P puis poser $y = P + z$ pour se ramener à la première question.

Ordre 2

Exercice 8: [Indications] [Correction] – *Calculer* –
Résoudre les équations d'ordre 2 ci-dessous

1. $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$
2. $y'' + y' = 3 + 2x$
3. $y'' + 3y' + 2y = e^x$
4. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$
5. $y'' + 4y' + 4y = e^{2x} + e^{-2x}$
6. $y'' - 2y' + 2y = xe^x$.
7. $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$.

8. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$. *(on pourra chercher une solution particulière d'expressions sous la forme $a\cos 2x + b\sin 2x$.)* ☆

9. $y'' + 4y = (1+x)\cos(2x)$ *(on pourra chercher une solution particulière d'expressions sous la forme $P\cos 2x + Q\sin 2x$.)* ☆

Exercice 9: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Raisonner* –

1. Résoudre l'équation $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$.
(On pourra se ramener à une équation d'ordre 1.)

2. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation

$$x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = 0$$

en posant $z(x) = x^2y(x)$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+x^2)^2y''(x) + 2(x-1)(1+x^2)y'(x) + y(x) = 0$$

en procédant au changement de variable $t = \arctan x$.

Exercice 1

1. $\mathbf{2xy' + y = x^n}$:

- Équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]0; +\infty[\mapsto \frac{C}{\sqrt{x}} \mid \quad C \in \mathbb{R}\}$$

- Solution particulière : La MVC donne une solution particulière y_0 telle que

$$y_P(x) = \frac{x^n}{2n+1}$$

- Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]0; +\infty[\mapsto \boxed{\frac{C}{\sqrt{x}} + \frac{x^n}{2n+1}} \mid \quad C \in \mathbb{R}\}$$

2. $\mathbf{(x-1)^3 y' - (x-1)^2 y = 1}$:

- Équation homogène : $y' - \frac{1}{x-1} y = 0$

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]1; +\infty[\mapsto \lambda(x-1) \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Solution particulière : La MVC donne une solution particulière y_0 telle que

$$y_P(x) = -\frac{1}{3(x-1)^2}$$

- Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]1; +\infty[\mapsto \boxed{\lambda(x-1) - \frac{1}{3(x-1)^2}} \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2

1. $\cos \in \mathcal{C}^1(I)$. Il suffit donc de vérifier que cos répond bien à l'équation. Or, en réinjectant,

$$\cos'(x)' \sin(x) - \cos(x)\cos(x) + 1 = -\sin^2 - \cos^2(x) + 1 = 0$$

Ainsi, cos est bien solution.

2. Équation homogène $\mathbf{y' \sin(x) - y\cos(x) = 0}$:

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]0; \pi[\mapsto \lambda \sin(x) \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

3. $\mathbf{y' \sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0}$:

- Solution particulière : La question précédente nous informe que cos est solution.
- Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]0; \pi[\mapsto \boxed{\lambda \sin(x) + \cos(x)} \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3

1. Équation homogène : $3xy' - 4y = 0$

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]0; +\infty[\mapsto \lambda x^{4/3} \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2. Tous les coefficients sont polynomiaux. On peut tenter de trouver une solution polynomiale.
3. $\mathbf{3xy' - 4y = x}$:

- Solution particulière : La recherche d'une solution polynomiale donne une solution particulière y_0 telle que

$$y_P(x) = -x$$

- Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]0; +\infty[\mapsto \boxed{cx^{4/3} - x} \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

4. $\mathbf{y' + 2y = x^2 - 2x + 3}$:

- Équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-2x} \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Solution particulière : La solution est polynômiale et les coefficients linéaires, on peut donc chercher une solution particulière polynomiale (de degré 2)

$$y_P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

- Conclusion : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in \mathbb{R} \mapsto \boxed{\lambda e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}} \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 4

1. L'ensemble des solutions générales de l'équation (déjà fait) est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]0;+\infty[\mapsto \frac{C}{\sqrt{x}} + \frac{x^n}{2n+1} \mid \quad C \in \mathbb{R}\}$$

Soit $y : x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x}} + \frac{x^n}{2n+1}$ une solution

$$\begin{aligned} y(1) = a \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{C}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2n+1} = a \\ &\Leftrightarrow \quad C = a - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Étant donné qu'il s'agit d'une équivalence, on sait qu'il existe (sens $\Leftarrow$) une unique ($\Rightarrow$) fonction φ vérifiant la condition initiale $\varphi(1) = a$ demandée :

$$\boxed{\varphi : x \mapsto \mapsto \frac{a - \frac{1}{2n+1}}{\sqrt{x}} + \frac{x^n}{2n+1}}$$

2. $\boldsymbol{(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)}$:

- Équation homogène :

$$\mathcal{S}_0 = \{y : x \in]-1;+\infty[\mapsto \frac{\lambda}{1+x} \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Solution particulière : La MVC donne une solution particulière y_0 telle que

$$y_P(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x}$$

- Conclusion générale : L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]-1;+\infty[\mapsto \boxed{\frac{C}{1+x} + \ln(1+x)} \mid \quad C \in \mathbb{R}\}$$

- Solution particulière : Soit $y \in \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{C}{1+0} + \ln(1+0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad C = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, il n'y a qu'une seule solution passant par le point $(0,0)$:

$$\boxed{y : x \in]-1;+\infty[\mapsto \ln(1+x)}$$

Exercice 5

1. De même que pour 1, de l'exercice 1, on trouve (attention à a valeur obsolue !)

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]-\infty;0[\mapsto \boxed{\frac{C}{\sqrt{|x|}} + \frac{x^n}{2n+1}} \mid \quad C \in \mathbb{R}\}$$

2. Les solutions sont les mêmes que dans l'exercice 1, à ceci près que le domaine de définiton change.

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]-\infty;1[\mapsto \boxed{\lambda(x-1) - \frac{1}{3(x-1)^2}} \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

3.

$$\mathcal{S} = \{y : x \in]-\infty,0[\mapsto \boxed{cx^{4/3} - x} \mid \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 6

1. $\boldsymbol{x^3y' - x^2y = 1}$:

$$y(x) = \lambda x - \frac{1}{3x^2}$$

2. $\boldsymbol{xy' + y = \cos x}$:

$$y(x) = \lambda + \sin x$$

3. $\boldsymbol{x(x^2-1)y' + 2y = x\ln x - x^2}$:

$$y(x) = \frac{x}{1-x^2}\Big((1+x)\ln x + 1 + \lambda x\Big) = \frac{x}{1-x}\Big(1 + \ln x\Big) + \frac{x^2c}{1-x^2}$$

Exercice 7

1. $\boldsymbol{z' = z^2 + 2z}$:

Supposons que z ne s'annule pas. En posant $w = 1/z$, on obtient

$$z' = w'/w^2$$

En réinjectant dans l'équation, on obtient

$$-w' = 1 + 2w$$

i.e.

$$w' + 2w = -1$$

et donc

$$w = -\frac{1}{2} + \lambda e^{-2x}$$

d'où

$$z = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \lambda e^{-2x}}$$

Pour les solutions qui s'annulent, il faut plus de théorie...

2. $y' = (y-x)^2$:

$P = x+1$ et $y = 1 + x + \frac{1}{-\frac{1}{2}+\lambda e^{-2x}}$.

Exercice 8

1. $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$:
   Solutions de l'équation caractéristique :
   $$r_1 = 2, r_2 = -3$$
   Solutions de l'équation :
   $$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} + 2 + 3x + 5x^2}$$
2. $y'' + y' = 3 + 2x$:
   Solutions de l'équation caractéristique :
   $$r_1 = 0,\ r_2 = -1$$
   Solutions de l'équation :
   $$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_2 + \lambda_2 e^{-x} + x + x^2}$$
3. $y'' + 3y' + 2y = e^x$:
   Solutions de l'équation caractéristique :
   $$r_1 = -2, r_2 = -1$$
   Solutions de l'équation :
   $$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} + \frac{1}{6} e^x}$$
4. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$:
   Solutions de l'équation caractéristique :
   $$r_1 = -2, r_2 = -1$$
   Solutions de l'équation :
   $$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} + x e^x}$$
5. $y'' + 4y' + 4y = e^{2x} + e^{-2x}$:
   Solution de l'équation caractéristique :
   $$r = -2$$
   Solutions de l'équation :
   $$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \mu x) e^{-2x} + \frac{1}{16} e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}}$$
6. $y'' - 2y' + 2y = xe^x$:
   Solutions de l'équation caractéristique :
   $$r_1 = 1 + i,\ r_2 = 1 - i$$
   Solutions de l'équation :
   $$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto (x + a\cos x + b \sin x) e^x.}$$
7. $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$:
   Solution de l'équation caractéristique :
   $$r = 2$$
   Solutions de l'équation :
   $$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto y = (ax+b)e^{2x} + 2xe^x.}$$
8. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25 \sin 2x$:
   Solutions de l'équation caractéristique :
   $$r_1 = 2 + 3i,\ r_2 = 2 - 3i.$$
   On pose $y_0 = a\cos 2x + b \sin 2x$. On a
   $$\begin{aligned} y_0'' - 4y_0' + 13y_0 &= (-4a\cos 2x - 2b \sin 2x) - 4(-2a \sin 2x + 2b \cos 2x) + 13(a\cos 2x + b \sin 2 \\ &= \cos(2x)() \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} y_0 \text{ est solution } &\Leftrightarrow y_0'' - 4y_0' + 13y_0 = 10\cos 2x + 25 \sin 2x \\ &\Leftrightarrow y_0'' - 4y_0' + 13y_0 = 10\cos 2x + 25 \sin 2x \end{aligned}$$
   $$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto y = e^{2x}(a\cos 3x + b \sin 3x) + 2\cos 2x + \sin 2x.}$$
9. $y'' + 4y = (1+x)\cos(2x)$:
   Solutions de l'équation caractéristique :
   $$r_1 = -2i, r_2 = 2i$$
   $$\frac{1}{8} x \left(\sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) + \alpha \sin 2x + \beta \cos(2x)$$