Feuille 4 - Polynômes

Racines

Exercice 1: [Indications] [Correction] – *Cours – Raisonner* – Trouver un polynôme P de degré 2 à coefficients entiers tels que $P(1-\sqrt{3})=0$

Exercice 2: [Indications] [Correction] – *Cours – Raisonner* –

1. Justifier que le polynôme $P(X)=X^5-X^2+1$ admet au moins une racine réelle.
2. a) Montrer que P' a exactement deux racines réelles α et β et les expliciter.
   b) Justifier que les racines ainsi trouvées ne sont pas doubles.
   c) Montrer qu'il existe des coefficients $b,c\in\mathbb{R}$ tels que
   $$P'=(X-\alpha)(X-\beta)(5X^2+bX+c)$$
   et tel que $(5X^2+bX+c)$ n'ait pas de racine réelle. *On ne demande pas d'expliciter b,c.*
   d) Étudier le signe de la fonction $x\in\mathbb{R}\mapsto P'(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que P n'admet qu'une seule racine réelle. *(On pourra éventuellement faire appel à une calculatrice pour calculer certaines valeurs approchées si besoin.)*

Exercice 3: [Indications] [Correction] – *Cours – Raisonner* –
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $P=1+X+\frac{X^2}{2!}\dots+\frac{X^n}{n!}$.

1. Montrer que si α est racine multiple de P, alors $\alpha=0$
2. En déduire que P n'a que des racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

Divisibilité

Exercice 4: [Indications] [Correction] – *Cours – Calculer* –
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Prouver que B divise A, où :

1. $B=X(X+1)(2X+1)$ et $A=(X+1)^{2n}-X^{2n}-2X-1$
2. $B=X^2+X+1$ et $A=X^{3n+2}+X^{3m+1}+X^{3p}$
3. $B=X^2-2X\cos\theta+1$ et $A=X^{2n}-2X^n\cos n\theta+1$. ☆

Exercice 5: [Indications] [Correction] – *Cours – Calculer* –

1. Soient $P\in\mathbb{K}[X]$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors P est divisible par $X-1$.
2. Soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P(X^3)+XQ(X^3)$ est divisible par X^2+X+1, alors P et Q sont divisibles par $X-1$. ☆

Factorisation

Exercice 6: [Indications] [Correction] – *Cours – Calculer* –

1. Soit $P=(X^2-X+1)^2+1$.
   a) Vérifier que i est racine de P.
   b) En déduire une autre racine de P.
   c) En déduire alors un polynôme Q tel que
   $$P=(X-\alpha)(X-\beta)Q$$
   où $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ sont à déterminer.
   d) En déduire pour finir la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.
2. Faire de même avec le polynôme $P=X^4+2X^2+1$.

Exercice 7: [Indications] [Correction] – *Calculer – Mobiliser* –
Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles les polynômes suivants :

1. $A=X^4-1$
2. Classique et à connaître : $B=X^2+X+1$
3. $C=X^4+X^2+1$
4. $D=X^3+X^2+X+1$
5. $E=X^6+X^4+X^2+1$ ☆
6. $F=X^5-13X^4+67X^3-171X^2+216X-108$

Exercice 8: [Indications] [Correction] –
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P_n=X^n-1$

1. a) Montrer que les $\alpha_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ sont racines de ce polynôme pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.
   b) Expliciter une racine réelle parmi celles évoquées ci-dessus.
   c) En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$ de P_n
2. Application : Chercher une factorisation dans $\mathbb{C}$ de
   a) $A=X^4+X^3+X^2+X+1$.
   b) $B=X^6-X^5+X^4-X^3+X^2-X+1$.

Exercice 9: [Indications] [Correction] *– Mobiliser – Calculer –* ☆

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$P = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n+1)!}.$$

1. Montrer que $n+1$ est racine de P ☆
2. Factoriser P en produit de facteurs irréductibles.

Divers "mini" problèmes

Exercice 10: [Indications] [Correction] *– Cours – Calculer – Raisonner – Chercher –*

On cherche à résoudre l'équation $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul.

1. On suppose que P est solution.
   a) Quel est le degré de P ?
   b) Quel est le coefficient dominant de P ?
   c) Justifier que P admet au moins une racine réelle. On la notera α.
2. a) Montrer que soit α est racine au moins double de P, soit on a $P'' = 6(X-\alpha)$.
   b) Trouver les P possibles dans les deux cas. ☆
3. Répondre à la question posée.

Exercice 11: [Indications] [Correction] *– Cours – Calculer – Raisonner – Chercher –* ☆

On veut résoudre $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Se poser la question, comme dans l'exercice précédent, du degré et voir si on peut déterminer rapidement un coefficient dominant.
2. Montrer que $Q = P(X^2)$ a deux racines complexes évidentes et les expliciter.
3. En déduire une racine de P.
4. En déduire l'ensemble des P possibles.

Exercice 12: [Indications] [Correction] *– Cours – Calculer – Chercher –* ☆☆

On cherche dans cet exercice l'ensemble des polynômes de degré $\geqslant 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

1. On note $n = \deg P$. On suppose que P' divise P.
   a) Montrer qu'il existe une racine $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P = \frac{1}{n}(X-\alpha)P'$$
   b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
   $$P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+1)}$$
   où $P^{(j)}$ est la dérivée $j^{\text{ème}}$ de P.
   c) En déduire que nécessairement, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ il existe $a_j \in \mathbb{R}$ tel que
   $$P^{(n-j)} = a_j(X-\alpha)^j$$
2. En déduire l'ensemble des polynômes P tels que P' divisent P.

Indications

Exercice 1 [Correction]

Quel pourrait être la deuxième racine ? Penser ensuite à la décomposition d'un tel polynôme en polynôme de degré 1.

Exercice 2 [Correction]

1. Regarder la parité du degré de P.
3. Faire le tableau de variation de P.

Exercice 4 [Correction]

2. On pourra exprimer les racines de B sous forme trigonométrique.

Exercice 5 [Correction]

1. Réfléchir à une éventuelle racine de P.

Exercice 7 [Correction]

en l'absence de calculs simples, on peut commencer par chercher une racine évidente dans la plupart des cas $(1, 2, 3, -1, -2, -3, i)$. Si tel est le cas, on pensera à vérifier si la racine est multiple.

3. On pourra commencer par poser $y = x^2$ dans la résolution de $x^4 + x^2 + 1 = 0$.
5. On peut poser $y = x^2$ dans la résolution de $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$.
   Pour la recherche des x en ayant les y, on pourra par exemple pense, si nécessaire, à poser $y = a + ib$.

Exercice 8 [Correction]

2. b) On pourra remarquer que $T = \sum_{k=0}^{6}(-X)^k$ et se ramener ensuite au cas $X^n - 1$.

Exercice 9 [Correction]

1. On essaiera de reconnaître des coefficients binomiaux. La formule du binôme de Newton peut servir.
2. On pourra montrer par récurrence sur n que 1, puis 2, puis ...(jusqu'à où ?) est racine de P. .

Exercice 10 [Correction]

1. a) On pensera à faire d'abord une équation aux degrés.

Exercice 1

On se souvient que les racines réelles des polynômes P réels de degré 2 sont "conjugués" au sens où elles s'écrivent $r_1 = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et qu'alors P s'écrit $P = a(X-r_1)(X-r_2)$ où a est une constante.
On peut dons penser que la deuxième racine ici est $1+\sqrt{3}$ et qu'on peut poser $P = (X-(1-\sqrt{3}))(X+(1-\sqrt{3}))$. Voyons si ce polynôme est à coefficient entiers :

$$P = X^2 - \left((1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\right)X + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = X^2 - 2X + (1-3)$$

Le polynôme

$$\boxed{P = X^2 - 2X + 2 \text{ répond à a question}}$$

Exercice 2

1. C'est un polynôme réel de degré impair. D'après le cours, on sait donc qu'il s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$.
2. a) Tout d'abord, on a $P' = 5X^4 - 2X = X(5X^3-2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } 5x^3 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{car la fonction "cube" est injective sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) α ou β sont racines double de P' si elles sont également racine des $(P')' = P''$. Or,

$$P'' = 20X^3 - 2$$

Ainsi

$$P''(0) = 2 \neq 0$$

0 n'est pas racine double.

$$P''\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 20\left(\frac{2}{5}\right) - 2 = 6 \neq 0$$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ n'est pas racine double.

c) D'après la divisibilité au niveau des racines, on sait qu'il existe un polynôme Q de degré $\deg P' - 2 = 2$ tel que

$$P' = (X-\alpha)(X-\beta)Q$$

On note alors

$$Q = aX^2 + bX + c$$

On a donc

$$P' = X(X - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}})(aX^2+bX+c)$$

Mais ceci signifie que le coefficient dominant de P' est $1\times 1\times a = a$. Or, comme on sait que $P' = 5X^4 - 2X$, on en déduit que

$$\boxed{a = 5}$$

et donc que

$$\boxed{P' = X\left(X - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right)(5X^2+bX+c)}$$

De plus, le polynôme $5X^2+bX+c$ ne peut avoir de racine réel, sinon : soit il existerait une autre racine pour P' que α et β, soit α ou β serait une racine double de P', ce qui est exclu par la question précédente.

d) La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 5x^2+bx+c$ est polynomiale et n'a pas de racine réelle. On sait donc qu'elle est de signe constant, celui de son coefficient dominant 5. Ainsi, elle est toujours strictement positive.
Ainsi, $P'(x)$ est du signe de $x\left(x - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ qui est également polynômiale de degré 2 de coefficient dominant $1 > 0$.

$$\boxed{P'(x) \text{ est donc positive en dehors de l'intervalle } \left[0, \left(\tfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \text{ et négative ailleurs.}}$$

3. Le tableau de signe de P' permet de faire le tableau de variation de P. On s'aperçoit que la courbe ne peut couper l'axe des abcisses qu'une seule fois. La racine de P est donc unique.

Exercice 3

1. Si α est racine multiple de P, alors $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Or

$$P' = 1 + X + \frac{X^2}{2!} \dots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} = P - \frac{X^n}{n!}.$$

Ainsi,

$$P'(\alpha) = P(\alpha) - \frac{\alpha^n}{n!}$$

et donc

$$\frac{\alpha^n}{n!} = 0$$

La seule possibilité est alors

$$\boxed{\alpha = 0}$$

2. Supposons qu'il exsite une racine multiple α de P. Alors, d'après la question précédente, on a $\alpha = 0$.
Or,

$$P(\alpha) = P(0) = 1 \neq 0$$

α n'est donc en réalité pas racine de P, il y a contradiction.

Exercice 4

1. B est de racines simples $0, 1, \frac{1}{2}$. B divise donc A ssi $0, -1, -\frac{1}{2}$ sont des racines de A. Or :

$$A(0) = 1 - 1 = 0$$

$$A(-1) = 0^{2n} - (-1)^{2n} + 2 - 1 = -1 + 1 = 0$$

$$A\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 1 - 1 = 0$$

2. Les racines de B se trouvent soit grâce aux techniques de recherces habituelles de polynômes de degré 2, soit on se souvient que les racines sont j et $\overline{j} = j^2$, où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Il n'y a donc plus qu'à remplacer dans A :

$$A(j) = j^{3n}j^2 + j^{3m}j + j^{3p} = j^2 + j + 1 = A(j) = 0$$

Comme A est un polynôme réel, on sait que $\overline{j}$ est automatiquement racine de A également. D'où B divise A.

3. Le discriminant de A est

$$\Delta = 4(\cos\theta)^2 - 4 = 4\sin^2\theta$$

Ainsi, les racines de A sont

$$r_1 = \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = e^{-i\theta}, \quad r_2 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = e^{i\theta}$$

D'où

$$X^2 - 2X\cos\theta + 1 = (X^n - e^{i\theta})(X^n - e^{-i\theta})$$

Il n'y a plus qu'à réinjecter dans A, comme dans les cas précédents :

$$A(e^{i\theta}) = e^{i2n\theta} - 2e^{in\theta}\cos n\theta + 1$$

à ceci près qu'il faut observer que

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

D'où

$$A(e^{i\theta}) = e^{i2n\theta} - 2e^{in\theta}\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} + 1 = e^{i2n\theta} - e^{2in\theta} - e^0 + 1 = 0$$

Le polynôme A étant réel, on est certain que $e^{-in\theta}$ (qui est le conjugué de l'autre racine) est également racine de A. CQFD.

Exercice 5

1. Si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$, alors 1 est racine de $P(X^n)$, c'est -à-dire $P(1^n) = 0$. Or, ceci se simplifie en

$$P(1) = 0$$

d'où le fait que P est divisible par $X - 1$

2. Les racines de X^2+X+1 sont les deux racines conjuguées j et $\bar{j}$. Ainsi, elles sont également racines de $P(X^3)+XQ(X^3)$. En réinjectant, ceci signifie (pour j) que

$$P(j^3)+jQ(j^3)=0$$

i.e.

$$\underbrace{P(1)}_{\in\mathbb{R}}+j\underbrace{Q(1)}_{\in\mathbb{R}}=0$$

en écriture algébrique :

$$P(1)-\frac{1}{2}Q(1)+i\frac{\sqrt{3}}{2}Q(1)=0$$

D'où $Q(1)=0$ car la partie imaginaire est nulle, et ensuite, en réinjectant ce résultat dans l'égalité ci-dessus,

$$P(1)=0$$

Dans les deux cas, on obtient donc que

$$\boxed{X-1 \text{ divise } P \text{ et } Q.}$$

Exercice 6

1. a) $P(i)=(i^2-i+1)^2+1=i^2+1=0$.
   b) Par conjugué, comme P est à coefficients réels, on en déduit que $-i$ est égalemant racine.
   c) D'après l'énonce, on souhaite dans un premier temps poser

$$\boxed{\alpha=i,\quad \beta=-i}$$

Il existe alors un polynôme Q de degré $4-2=2$ tel que

$$P=(X-\alpha)(X-\beta)Q$$

On pose alors $Q=aX^2+bX+c$. Par coefficient domimant de P qi vaut 1, on sait qu'on a

$$a\times 1\times 1=1$$

d'où

$$a=1$$

ensuite, par constante de P, on sait que d'une part, par définition $P=(X^2-X+1)^2+1$, la constante est $1+1=2$ et que, par factorisation $P=(X-\alpha)(X-\beta)Q$, la constante est $\alpha\beta c$ D'où

$$i\bar{i}c=2$$

i.e.

$$c=2$$

On peut, pour finir, développer le reste :

$$P=(X-i)(X-\bar{i})(X^2+bX+2)=(X^2+1)(X^2+bX+2)=X^4+bX^3+\text{degré inférieur}$$

$$P=(X^2-X+1)^2+1\underbrace{=}_{\text{à vue}}X^4-2X^3+\text{degré inférieur}$$

D'où $b=-2$ et ainsi

$$\boxed{P=(X-i)(X-\bar{i})(X^2-2X+2)}$$

   d) Il reste à chercher les racines de Q. Son discriminant est

$$\Delta=4-8=-4$$

D'où les racines complexes :

$$\frac{2\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}=1\pm i$$

et donc

$$\boxed{P=(X-i)(X-\bar{i})(X-1-i))(X-1+i)}$$

2. i est bien racine de P avec $P(i) = 0$.
En procédant de même que dans la question précédente, on trouve

$$\boxed{P = (X - i)^2(X + i)^2}$$

Exercice 7

1. Il est rapide de voir par identité remarquable (ou par racine évidentes) que

$$X^4 - 1 = (X^2)^2 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$$

D'où
$$\boxed{X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)}$$

2. La résolution classique sur des polynôme de degré 2 nous dit que les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et $\overline{j} = j^2$. Ainsi, comme le coefficient dominant est 1 :

$$\boxed{X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)}$$

3. On cherche les solutions de $x^4 + x^2 + 1 = 0$ et on pose $y = x^2$. On sait alors que l'équation équivaut à :

$$y^2 + y + 1 = 0.$$

Or les solutions de cette équation sont j, j^2, d'où x est solution de l'équation initiale ssi
$$x^2 = j \quad \text{ou} \quad x^2 = j^2$$

i.e.
$$x^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 \quad \text{ou} \quad x = \pm j$$

i.e.
$$x = \pm e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad x = \pm j$$

Ainsi, comme le coefficient dominant est 1, on a

$$\boxed{X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X + e^{\frac{i\pi}{3}})(X - j)(X + j)}$$

4. On voit que $-1, i$ sont racines évidentes. Alors $-i$ est également racine car D est à coefficients réels. D étant de degré 3 avec commes coefficient domiant 1, on obtient :

$$\boxed{X^3 + X^2 + X + 1 = (X - 1)(X - i)(X + i)}$$

5. On pose $y = x^2$. Alors $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$ équivaut à :
$$y^3 + y^2 + y + 1 = 0$$
Les solutions de cette équation sont les racines de D, c'est-à-dire $-1, i, -i$. Or,
$$y^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm i$$
$$y^2 = i \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$
$$y^2 = -i \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$
(les deux dernières sont à résoudre, par exemple à l'aide d'une équation sur les complexes obtenue en écrivant $y = a + ib$. Ce n'est pas détaillé ici.) Conclusion :

$$\boxed{X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X - i)(X + i)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\right)}$$

6. 2 et 3 sont racines "évidentes" de F. En dérivant, (F étant à coefficients réels) on constate qu'elles sont également racines multiples toutes les deux car $F'(2) = F'(3) = 0$.
On sait donc que
$$F = (X - 2)^2(X - 3)^2(aX + b)$$
le coefficient dominant nous montre que $a = 1$. La constante nous montre que
$$(-2)^2(-3)^2 b = 108$$
D'où
$$b = -3$$
et ainsi,
$$\boxed{X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108 = (X - 2)^2(X - 3)^3}$$

Exercice 8

1. a) On a
$$P_n\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n - 1 = e^{2k\pi} - 1 = 0$$
b) Parmi ces racines, il y a $\alpha_0 = 1$ (qui est aussi racine évidente.)
c) On sait que les éléments α_k sont deux à deux distincts car les arguments sont tous différents dans $[0, 2\pi[$. Ainsi, on dispose de n racines 2 à 2 distinctes pour un polynôme de degré n, avec comme coefficient dominant 1. D'où
$$\boxed{P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}})}$$

2. **a)** On veut cherche les racines de A en résolvant $A(x)=0$, c'est-à-dire

$$A(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{4} x^k = 0 \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{x\neq 1} \quad \frac{x^5-1}{x-1}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^5-1=0, \quad x\neq 1$$

d'où

$$A(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad P_5(x)=0, \quad x\neq 1$$

C'est alors une application directe de la question 1 puisque les racines de P_5 sont connues.

$$\boxed{X^4+X^3+X^2+X+1=\prod_{k=1}^{4}(X-e^{i\frac{2k\pi}{5}})}$$

b) Une fois qu'on a vu qu'en posant $y=-x$ dans la résolution de $B(x)=0$, on obtient comme dans le précédent (mais avec $n=7$ au lieu de $n=5$) la décomposition

$$\boxed{X^6-X^5+X^4-X^3+X^2-X+1=\prod_{k=1}^{6}(X+e^{i\frac{2k\pi}{7}})}$$

Exercice 9

1. On a

$$P(n+1)=1-\frac{n+1}{1!}+\frac{(n+1)n}{2!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(n+1)n(n-1)\times\cdots\times 1}{(n+1)!}.$$

On reconnait des coefficient binomiaux :

$$P(n+1)=\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}-\cdots+(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}.$$

Alors, en mettant en valeur la formule du binôme :

$$P(n+1)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k 1^{n+1-k}$$

on trouve

$$P(n+1)=(1-1)^{n+1}=0$$

2. On pose $P_n=1-\frac{X}{1!}+\frac{X(X-1)}{2!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n+1)!}$.
Montrons par récurrence sur n que $1,\ldots,n+1$ est racine de P_n.

$\star$ Initialisation : pour $n=0$,

$$P_1=1-\frac{X}{1!}$$

où on a, par la question 1 ou par vérification directe :

$$P_1(1)=0$$

$\star$ Hérédité (de $n-1$ à n). On remarque que

$$P_n=P_{n-1}+\underbrace{(-1)^{n+1}\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n+1)!}}_{A_n}$$

Par HR, les nombre 1 à n sont racines de P_{n-1}. Comme ils sont tous racines évidentes de A_n, on aura également qu'il sont racines de P_n.
De plus, par la question 1, $n+1$ est également racine de P_n.

$\star$ Conclusion : On a donc bien les racines $1,\ldots,n+1$.

On a donc $n+1$ racines pour un polynôme de degré$n+1$ et de coefficient dominant $(-1)^{n+1}$ d'où

$$\boxed{P_n=(-1)^{n+1}\frac{(X-1)\cdots(X-n)\big(X-(n+1)\big)}{(n+1)!}}$$

Exercice 10

1. **a)** On pose n le degré de P.

- si $n<2$

on a $P''=0$ et donc la seule solution est $P=0$ $n=0$ est donc impossible.

- si $n\geqslant 2$

On suppose que P est solution, alors

$$\deg P'P''=(n-1)+(n-2) \qquad \text{et} \qquad \deg P=n$$

D'où

$$n=2n-3$$

autrement dit,

$$\boxed{\deg P=3}$$

b) On note $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $a \neq 0$ puisque $\deg P = 3$. Alors

$$P' = 3aX^2 + \dots, \quad P'' = 6aX + \dots$$

Les coefficients dominants vérifient alors l'équation

$$3a \times 6a = 18a$$

et donc, comme $a \neq 0$ et

$$\boxed{\text{le coefficient dominant de } P \text{ est } a = 1}$$

c) P est à coefficients réels de degré impair, donc P admet au moins une racine réelle.

2. a) Comme α est racine de P, alors $P(\alpha) = 0$ et donc, soit $P'(\alpha) = 0$, soit $P''(\alpha) = 0$.

- <u>si $P'(\alpha) = 0$,</u>

alors α est racine multiple.

- <u>Si $P''(\alpha) = 0$,</u>

alors α est racine de P''. Comme P'' est de degré 1 et de coefficient dominant $6a = 6$, alors

$$P'' = 6(X - \alpha).$$

b) - <u>si α est racine multiple :</u>

On sait que P s'écrit

$$P = (X - \alpha)^2(X - b)$$

où $b \in \mathbb{R}$.
On peut réinjecter dans l'équation complète ou, pour simplifier un peu, chercher une équation sur les constantes en réinjectant dans l'équation et on trouve alors en simplifiant

$$(b - \alpha)^2 = 0$$

et donc $b = \alpha$, c'est-à-dire

$$P = 6(X - \alpha)^3$$

- <u>si α est racine de P'' :</u>

Alors $P'' = 6(X - \alpha)$. On intègre deux fois pour obtenir P et on en déduit l'existance de λ, μ tels que

$$P = (X - \alpha)^3 + \lambda X + \mu$$

Or, α est racine de P, donc, en réinjectant dans $P(\alpha) = 0$, on a

$$\mu = \lambda\alpha$$

et P s'écrit

$$P = (X - \alpha)^3 + \lambda(X - \alpha)$$

En réinjectant tout ça dans la recherche des constantes de $P'P'' = 18P$, on trouve $\lambda = 0$.
en conclusion, dans les deux cas,

$$\boxed{P = 6(X - \alpha)^3}$$

3. On sait déjà que les solutions s'écrivent sous la forme $P = 6(X - \alpha)^3$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Il ne reste qu'à réinjecter dans l'équation pour vérifier qu'en effet, tous ces polynômes répondent à la question. L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\{P = 6(X - \alpha)^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 11

1. L'équation aux degré donne comme seul degré possible $\boxed{n=2.}$ En revanche, la considération des équations sur les coefficients dominants ne donne pas grand chose.
2. On observe que i et $-i$ sont racines de (X^2+1), donc elles sont également racines de $P(X^2)$.
3. D'après la question précédente, on sait que $i, -i$ sont racines de Q. Ceci signifie

$$0 = Q(i) = P(i^2) = P(-1)$$

   On obtient que -1 est racine de P. L'essai avec $-i$ donne la même chose.
4. Le degré de P étant 2, on sait qu'il existe λ, a tels que

$$P = \lambda(X+1)(X-a)$$

   En réinjectant dans l'équation, on a alors

$$\begin{aligned} P(X^2) = (X^2+1)P(X) \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda(X^2+1)(X^2-a) = (X^2+1)\lambda(X+1)(X-a) \\ &\Leftrightarrow \quad (X^2-a) = (X+1)(X-a) \\ &\Leftrightarrow \quad a = -1 \quad \text{(en développant l'équation)} \end{aligned}$$

   D'où P est solution si et seulement si

$$\boxed{P = \lambda(X+1)^2 \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{C} \text{ quelconque}}$$

Exercice 12

1. a) D'après la divisibilité de P par P', comme $\deg P' = \deg P - 1$, il existe un polynôme Q de degré 1 tel que

$$P = QP'$$

   Or, si $P = a_n X^n + \ldots$, alors $P' = n a_n X^{n-1} + \ldots$. Le coefficient dominant de Q doit donc être $\frac{1}{n}$ pour compenser celui de P' et arriver au coefficient a_n de P. En posant α la racine de Q, on obtient ce qui est demandé.

   b) La démonstration se fait par récurrence sur k en dérivant l'expression du k précédent.

   c) Toujours par récurrence sur j. L'initialisation se fait par $P^{(n)}$ qui est une constante, car $\deg P = n$. On peut bien l'écrire sous la forme

$$P^{(n-0)} = a_j(X-\alpha)^0$$

   Pour l'hérédite, on intègre $P^{(n-j)}$ pour obtenir $P^{(n-(j+1))} = P^{(n-j-1)}$ en tenant compte du fait que α est racine de chaque dérivée.
2. D'après la question précédente, les candidats sont à chercher parmi les polynômes P tels que

$$P = a(X-\alpha)^n$$

   Or tous ces polynômes vérifient bien que P' divise P, d'où le fait de dire que l'ensemble des polynômes cherchés sont les

$$\boxed{P = a(X-\alpha)^n, \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \text{ quelconques.}}$$