Espaces probabilisés

Univers et support

Exercice 1: [Indications] [Correction] – *Raisonner – Modéliser* –
Déterminer un espace probabilisé adapté à chacune des expériences aléatoires suivantes. On se demandera à chaque fois si les événements élémentaires sont équiprobables.

1. On lance un dé cubique. On s'intéresse au numéro affiché
  a) Si le dé est équilibré.
  b) Si le dé n'est pas équilibré.

2. Un groupe de n personnes s'alignent en une rangée. On s'intéresse à l'ordre dans lequel sont placées les personnes.

3. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5 et deux jetons portant le numéro 6. On extrait au hasard un jeton de l'urne. On s'intéresse au numéro obtenu tel que
  a) les événements élémentaires ne sont pas forcément équiprobables.
  b) les événements élémentaires sont équiprobables.

Exercice 2: [Indications] [Correction] – *Modéliser – Cours* –
On dispose d'une urne contenant 6 boules rouges et 6 boules blanches. On tire 10 boules simultanément.

1. Déterminer l'univers correspondant aux différentes possibilités, de façon à ce qu'elles soient toutes équiprobables.

2. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer un support S de la variable ainsi que l'ensemble des probabilités $P(X=k)$ pour tout $k \in S$.

Espaces probabilisés quelconques

Exercice 3: [Indications] [Correction]
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tels que

$$P(A)=0,3 \qquad P(B)=0,2 \qquad P(A\cap B)=0,1$$

Calculer la probabilité pour que ni A ni B se produisent.

Exercice 4: [Indications] [Correction] – *Chercher* – Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Montrer que

$$P(A)-P(\overline{B}) \leqslant P(A\cap B) \leqslant \min(P(A), P(B))$$

Exercice 5: [Indications] [Correction] – *Chercher* – Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tels que

$$P(A)=P(B)=0,5$$

Montrer que $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(A\cap B)$.

Exercice 6: [Indications] [Correction] – *Chercher* – Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tels que $A\cup B\cup C=\Omega$; $P(B)=2P(A)$; $P(C)=3P(A)$. Montrer que $P(A)\geqslant \frac{1}{6}$.

Exercice 7: [Indications] [Correction] – *Raisonner – Chercher* – Montrer que si A et B sont des événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 8: [Indications] [Correction] – *Chercher* – Soient A et B deux événements indépendants et incompatibles. Calculer $\min(p(A), p(B))$.

Espaces probabilisés finis

Exercice 9: [Indications] [Correction] On procède à trois jets consécutifs d'un dé équilibré à 6 faces.

1. Construire un espace probabilisé Ω qui décrit cette expérience.

2. On considère les deux évènements suivants :
A : " la somme des points amenés par les deux premiers jets est impaire " ;
B : " la somme des points amenés par les deux derniers jets est impaire " ;
C : "Le nombre 1 apparait au moins deux fois. "
  a) Décrire précisément à l'aide d'une phrase les événements : $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap\bar{B}$, $A\cap B\cap C$.
  b) Déterminer un espace probabilisé (triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$) qui permet de calculer les probabilités de ces différents événements, ainsi que les probabilités de A, B, C.
  c) Calculer toutes ces probabilités.

Exercice 10: [Indications] [Correction] – *Chercher* –

On considère un jeu de fléchettes dont la cible comportes 3 zones numérotées de 1 à 3. On lance une fléchette sur la cible. On note

$$A_k : \text{"La fléchette atteint la zone } k\text{"} \qquad \forall k = 1, 2, 3$$

et

$$A_4 : \text{"la fléchette sort de la cible."}$$

On note p_k la probabilité de l'événement A_k.

Pour $k \in \{2, 3, 4\}$ la probabilité p_k d'atteindre la zone k est deux fois plus importante que celle d'atteindre la zone $k-1$.
Déterminer l'espace probabilisé associé à cette expérience.

Exercice 11: [Indications] [Correction] – *Chercher* –

Une urne contient 6 boules numérotée de 1 à 6. On tire trois boules de suite avec remise. Quelle est la probabilité :

1. de pouvoir former une suite croissante avec les boules obtenues ?
2. de pouvoir former une suite strictement croissante avec les boules obtenues ?
3. d'obtenir précisément une suite strictement croissante ?
4. d'obtenir précisément une suite croissante ?

Exercice 12: [Indications] [Correction] – *Chercher* – *Raisonner* – *Calculer* – ☆

Une urne contient $2n$ boules dont n blanches et n noires. On vide l'urne en effectuant n tirages au hasard de 2 boules simultanées.
On cherche à calculer la probabilité d'obtenir des boules de 2 couleurs différentes à chaque tirage. On considère les événements A ="on obtient des boules de 2 couleurs différentes à chaque tirage" et, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, A_k="on obtient des boules de 2 couleurs différentes au $k^{\text{ème}}$ tirage." On cherche donc à calculer $p(A)$.

1. Calculer $p(A_1)$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$,

$$P_{\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i}(A_k) = \frac{2(n-k+1)^2}{(2(n-k+1)(2(n-k+1)-1)}.$$

3. Exprimer A en fonction de $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$.
4. En déduire que $p(A) = \dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$ ☆

Exercice 13: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Modéliser* – *Calculer* –

Soit $(p, q) \in]0, 1[^2$. On suppose que
- la probabilité d'atteindre une cible avec un tir est p.
- la probabilité de détruire la cible en k impacts est $1 - p$.
On tire n fois. On cherche à calculer la probabilité de détruire la cible. On considère les événements A ="détruire la cible" et, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, B_k =" atteindre la cible k fois".

1. Déterminer, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $p(B_k)$ *(on pourra faire appel aux variables aléatoires finies si besoin.)*
2. Montrer, en utilisant le système complet $(B_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$, que

$$P(A) = 1 - \sum_{k=0}^{n} q^k P(B_k)$$

3. En déduire la valeur de $P(A)$.

Exercice 14: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – "Problème du tricheur"

Une population contient une proportion de p tricheurs (p réel et $0 \leqslant p \leqslant 1$). On fait tirer quatre cartes dans un jeu de 52 cartes à un individu choisi au hasard dans la population. Si c'est un tricheur, il obtient toujours un carré (i.e. "obtenir 4 cartes de même valeur").

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré pour une personne quelconque (c'est à dire qui n'est pas un tricheur) ?
2. Il obtient un carré. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

σ-additivité et systèmes (quasi)-complets

Exercice 15: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Existe-t-il une constante α telle que

$$p : \begin{array}{ccc} [\![2; +\infty[\![& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ k & \longmapsto & \frac{(-1)^k}{k!} \end{array}$$

définisse une loi de probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec $\Omega = [\![2; +\infty[\![$?

Exercice 16: [Indications] [Correction] – *Calculer* –

Soit p la probabilité définie sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p(\{n\}) = \alpha 3^{-n}.$$

1. Déterminer α à l'aide du système complet formé des $\{n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $p(\{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\})$.
3. Calculer la probabilité de l'ensemble des multiples de 2.
4. Calculer la probabilité de l'ensemble des nombres n dont le reste est 3 si on le divise par 4.

Exercice 17: [Indications] [Correction] – *Chercher* – *Raisonner* – *Calculer* –
Soient $p \in]0;1[$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système quasi complet d'événements tels que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,\ldots,i\}$,

$$p(B_i) = p^i(1-p), \qquad p_{B_i}(A_k) = \binom{i}{k}\frac{1}{2^i}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,\ldots,n\}$,

$$p_{A_k}(B_n) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^{n+1}}p^{n-k}(2-p)^{k+1}.$$

On utilisera la formule du binôme négatif admise :

$$\sum_{i=k}^{+\infty}\binom{i}{k}x^{i-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}, \quad \forall x \in]-1;1[,\ k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 18: [Indications] [Correction] – *Chercher* – *Raisonner* – *Calculer* –
Soient $\lambda > 0$, $p \in]0;1[$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système quasi complet d'événements tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,\ldots,n\}$,

$$p(B_n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad p_{B_n}(A_k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$p(A_k) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

Variable aléatoire et Fonction de répartition

Exercice 19: [Indications] [Correction] – *Cours* – Soit X une variable aléatoire discrète. On sait qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction de répartition de X est

$$F(x) = \begin{cases} b & \text{si } x < 1 \\ 2a & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ 5a & \text{si } 3 \leqslant x < 4 \\ 10a & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

1. Déterminer l'unique valeur possible de (a,b).
2. Vérifier que F est bien une fonction de répartition pour les valeurs de a, b trouvées précédemment.
3. X est elle une variable finie ? Déterminer sa loi.

Exercice 20: [Indications] [Correction] – *Cours* – On choisit au hasard 2 numéros distincts de l'ensemble $\{-2,-1,0,1,2\}$. Soit X le produit de ces deux numéros.

1. Déterminer un espace probabilisé adapté à cette expérience.
2. Déterminer le support de X et l'ensemble des probabilités non négligeables $P(X = k)$.
3. En déduire la fonction de répartition de X.
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 21: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – *Calculer* –
On dispose d'une cible de rayon R découpée en quatre zones délimitées par trois cercles concentriques de rayon $\frac{R}{4}$, $\frac{2R}{4}$ et $\frac{3R}{4}$. Les zones ainsi délimitées sont numérotées de 1 à 4 en partant du centre.

On choisit au hasard un point sur cette cible et on appelle X le numéro de la cible sur laquelle on tombe. On admet (pour l'instant) que la probabilité de tomber sur un disque est proportionnelle à sa surface.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
2. En déduire la loi de probabilité de X.

Exercice 22: [Indications] [Correction] – *Cours* – Soient a et b deux nombres réels et X une *v.a.*. On pose $Y = aX + b$

1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X.
2. *Application* : On pose $a = 2$, $b = 3$. Supposons que X suit une loi uniforme sur $\{1,\ldots,4\}$. Déterminer le graphique de la fonction de répartition de Y.

Exercice 23: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Raisonner* – Soient X, Y deux v.a. indépendantes de fonction de répartition F_X, F_Y. Déterminer en fonction de F_X et F_Y les fonctions de répartition des v.a.

1. $\max(X,Y)$.
2. $\min(X,Y)$

Exercice 24: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Calculer* –

1. Soit X une v.a de fonction de répartition F_X. Déterminer, en fonction de F_X, la fonction de répartition de la v.a.d. Y, où
   a) $Y = \ln X$. (avec X positive.)
   b) $Y = e^X$.
2. Appliquer à X un nombre au hasard choisi dans l'intervalle $]0,1]$, où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indications

Exercice 4 [Correction]

Pour montrer que $a \leq \min(\alpha, \beta)$ il est équivalent de montrer que

$$a \leq \alpha \text{ et } a \leq \beta$$

Exercice 5 [Correction]

Attention, il n'est dit nul part que les événements étaient incompatibles...

Exercice 6 [Correction]

Attention, on ne dit pas que les événements A, B, C sont incompatibles.

Exercice 7 [Correction]

Penser à décomposer B grâce à la partition $(A, \overline{A})$.

Exercice 8 [Correction]

On pourra s'intéresser au calcul de $P(A)P(B)$.

Exercice 10 [Correction]

On commence par chercher l'univers, puis la tribu associée et pour finir, les probabilités de chaque événement élémentaire.

Exercice 11 [Correction]

On pourra procéder par équiprobabilité et dénombrement en se référant aux modèles standards étudiés au début de la feuille.

2. On note S l'événement demandé, qui équivaut à dire que toutes les boules sont différentes.

Exercice 12 [Correction]

On pourra modéliser cette expérience en supposant que les boules sont toutes numérotées et donc distinces afin d'avoir équiprobabilité sur le tirage d'une boule en particulier.

Exercice 14 [Correction]

2. On pourra utiliser le fait que "être ou non un tricheur" est un système complet et s'aider éventuellement d'un arbre de probabilité qui explicite la situation.

Exercice 18 [Correction]

On pourra utiliser la formule des probabiltiés totales, mais attention, faire bien attention à ses bornes dans le calcul de la somme totale !

Exercice 19 [Correction]

1. Aller chercher les propriétés des fonctions de répartition.

Exercice 21 [Correction]

On rappelle à toutes fins utiles que la surface d'un disque de rayon r est πr^2.

Exercice 1

1. a) $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}$.
   b) C'est le même univers ... $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$
2. Ω est l'ensemble des permutations de n éléments.
3. a) $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$
   b) $\Omega = \{1, \ldots, 5, A, B\}$

Exercice 3

On a

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B})) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - (0,3 + 0,2 - 0,1) = 0,6. \end{aligned}$$

Exercice 4

$P(A) - P(\overline{B}) \leqslant P(A \cap B) \leqslant \min(P(A), P(B))$:

- Inégalité de droite :

C'est la plus simple, elle est quasi triviale, puisque

$$A \cap B \subset A \quad A \cap B \subset B$$

d'où

$$P(A \cap B) \leqslant P(A) \quad P(A \cap B) \leqslant P(B)$$

CQFD

- Inégalité de gauche :

Ceci revient à montrer que $P(A) \leqslant P(A \cap B) + P(\overline{B})$.
Or, $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap \bar{B})$ et $A \cap \bar{B}) \subset B$. D'où

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \leqslant P(A \cap B) + P(\bar{B})$$

Exercice 5

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) = P(A \cap B)$.

Exercice 6

De manière générale,

$$P(A \cup B \cup B) \leqslant P(A) + P(B) + P(C)$$

Ici, $P(A \cup B \cup C) = 1$ et $P(A) + P(B) + P(C) = 6P(A)$. D'où le résultat.

Exercice 7

- $\underline{p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A})p(B)}$:

On a $B = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, d'où

$$p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(B)$$

et donc

$$p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{B}) - p(A \cap B) = p(B) - p(A)p(B) = p(B)(1 - p(A)) = p(\overline{A})p(B)$$

- $\underline{p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A})p(\overline{B})}$:

On applique la première partie en remplaçant A, B respectivement par B, $\overline{A}$.

Exercice 8

Les informations de l'énoncé nous donnent

$$0 \underbrace{=}_{\text{incompatibilité}} P(A \cap B) \underbrace{=}_{ind.} P(A)P(B)$$

D'où $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$. Autrement dit,

$$\boxed{\min(p(A), p(B)) = 0}$$

Exercice 9

1. $\Omega = [\![1; 6]\!]^3$, tribu : $\mathcal{P}(\Omega)$ avec probabilité uniforme.
2. a) $A \cap B$: "les premiers et derniers jets sont de même parité et le deuxième de parité opposée."
   $A \cup B$: "il existe au moins un jet pair et un jet impair."
   $A \cap \bar{B}$: "la parité du premier jet est contraire à celle des deux derniers.".
   $A \cap B \cap C$:"le premier et dernier jet valent 1, alors que le deuxième est pair."
   b) Ω est un espace fini. On peut donc prendre $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme car sur cet univers, tous les événement sont équiprobables.

c) Par équiprobabilité des événements de l'univers, on applique la formule :

$$P(E)=\frac{\text{card}(E)}{\text{card}\,(\Omega)}=\frac{\text{card}(E)}{6^3}$$

D'où

$$P(A)=\frac{2\times3\times3\times6}{6^3}=\frac{1}{2}\quad ;\quad P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$$

puis, le plus simple :

$$P(A\cap B)=\frac{3\times3\times3}{6^3}=\frac{1}{8}$$

puis

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{2}-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

Pour les autres,

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{3}{6^3}=\frac{1}{72}$$

Exercice 10

Si Ω est l'univers des possibilités $\Omega=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, alors la famille $(A_k)_{k=1,\dots,4}$ constitue clairement un système complet de Ω. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}p_k=1$$

Sachant que

$$p_k=2p_{k-1}\quad\forall k=2,3,4$$

on trouve

$$p_1+\underbrace{2p_1}_{p_2}+\underbrace{4p_1}_{p_3}+\underbrace{8p_1}_{p_4}=1$$

Donc

$$\boxed{p_k=\tfrac{2^{k-1}}{15}\quad\forall k=1,\dots,4}$$

Exercice 11

1. Événement certain.
2. $p(S)=\dfrac{6\times5\times4}{6^3}=\dfrac{5}{9}$
3. Il existe 6^3 suites de numéros tirés pour les tirages avec remise en tout. Parmi ceux-ci, on sait que le nombre de suites de 3 éléments strictement croissantes est (cf exercice sur le dénombrement) est $\binom{6}{3}$ (Choix de 3 éléments distincts parmi 6 puis un seul classement possible.) $\dfrac{\binom{6}{3}}{6^3}$
4. Même chose que pout la question précédente, mais avec le nombre de suites croissantes au lieu de strictement croissantes. (cf exercices de dénombrement.) $\dfrac{\binom{6+2}{3}}{6^3}$

Exercice 12

Commençons par numéroter les boules par des numéros 2 à 2 distincts. Par exemple, on supposera que les numéros de 1 à n sont les boules blanches et les numéros de $n+1$ à $2n$ sont les boules noires.

1. Au premier tirage, on tire 2 boules simultanément et on ne s'intéresse pas aux autres résultats. Un univers adapté est donc par exemple l'ensemble Ω des combinaisons de 2 éléments parmi $2n$, sur lequel il y a alors équiprobabilité.
Il y a $\binom{2n}{2}=\frac{(2n)!}{2!(n-2)!}=\frac{2n(2n-1)}{2}$ possibilités totales de combinaisons (cardinal de l'univers).
Pour A_1, on souhaite des couleurs différents. On a donc au total, par principe multiplicatif :

$$\underbrace{2n}_{\text{choix de la première boule quelconque}}\times\underbrace{n}_{\text{choix de la deuxième boules dans l'autre couleur}}\ \text{possibilités ordonnées}$$

D'où

$$\frac{1}{2}\times2n\times n\ \text{possibilités non ordonnées}$$

$$\boxed{p(A_1)=\frac{n^2}{\binom{2n}{2}}=\frac{n}{2n-1}}$$

2. Dans le cas $\bigcap\limits_{i=1}^{k-1}A_i$, il reste $n-k+1$ boules de chaque espèce. Tout se passe donc comme dans le cas A_1 avec $n-k+1$ à la place de n, d'où

$$P\left(A_k/\bigcap_{i=1}^{k-1}A_i\right)=\frac{(n-k+1)^2}{\binom{2(n-k+1)}{2}}=\frac{2(n-k+1)^2}{2(n-k+1)(2(n-k+1)-1)}.$$

3. $A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$

4. Comme $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, la formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned}
P(A) &= p(A_1)\prod_{k=2}^{n} P_{A_1\cap\ldots\cap A_{k-1}}P(A_k)\\
&= \frac{n^2}{\binom{2n}{2}}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{2(n-k+1)^2}{2(n-k+1)(2(n-k+1)-1)}\\
&= \frac{2n^2}{2n(2n-1)}\prod_{k=2}^{n}\frac{2(n-k+1)^2}{2(n-k+1)(2(n-k+1)-1)}\\
&= \prod_{k=1}^{n}\frac{2(n-k+1)^2}{2(n-k+1)(2(n-k+1)-1)}\\
&= \prod_{j=1}^{n}\frac{2j^2}{2j(2j-1)} \quad \text{avec } j = n-k+1\\
&= \frac{\prod_{j=1}^{n} 2\cdot\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)^2}{\prod_{j=1}^{n} 2j(2j-1)}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{p(A) = \frac{2^n n!}{(2n)!}}$$

Exercice 13

1. $P(B_k)$ correspond à la probabilité de réussir k fois de manière indépendante dans une répétition de n expériences identiques et indépendantes de même probabilité de réussite p. Le nombre de réussite suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ d'où

$$\boxed{p(B_k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

2. La formule des probabilités totales sur le système complet évoqué donne directement

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} P_{B_k}(A)p(B_k) = \sum_{k=0}^{n}(1-q^k)p(B_k) = \sum_{k=0}^{n} p(B_k) - \sum_{k=0}^{n} q^k p(B_k)$$

Or, par système complet, $\sum_{k=0}^{n} p(B_k) = 1$

3. On réinjecte le résultat de la première question dans la deuxième :

$$P(A) = 1 - \sum_{k=0}^{n} q^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pq)^k(1-p)^{n-k}$$

Puis la formule du binôme de Newton nous donne

$$\boxed{P(A) = 1-(pq+1-p)^n}$$

Exercice 14

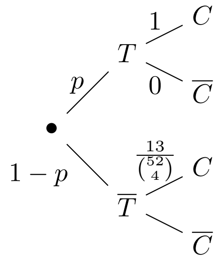
1. Les cartes étant toutes différentes, le tirage de 4 cartes parmi 52 peut se modéliser par l'univers de tous les sous ensembles de 4 éléments parmi 52. Sur cet univers, les événements sont équiprobables. Ainsi, pour un événement E de Ω, on a

$$P(E) = \frac{\operatorname{card}(E)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\operatorname{card}(E)}{\binom{52}{4}}$$

Notons C l'événement "obtenir un carré" et T l'événement : "être un tricheur". Or, obtenir un carré signifie que C doit contenir 4 cartes du même type. Il y a donc autant de possibilités que de choix du type parmi $52/4 = 13$. D'où

$$\boxed{P_{\overline{T}}(C) = \frac{13}{\binom{52}{4}}}$$

2. On cherche ici $P_C(T)$.
D'après l'énoncé, la 1ère question et par le fait que $(T, \overline{T})$ est un système complet, on connait les probabilités suivantes :



Ainsi,

$$P_C(T) = \frac{P(T \cap C)}{p(C)} = \frac{P_T(C)p(T)}{p_T(C)p(T) + p_{\overline{T}}(C)p(\overline{T})}$$

i.e. après application numérique

$$\boxed{P_C(T) = \frac{p}{p + \frac{13}{\binom{52}{4}}(1-p)}}$$

Exercice 15

p ne peut être une loi de probabilités, sinon, il existerait des probabilités négatives.

Exercice 16

1. $\alpha = 2$.
2. $p(\mathbb{N}^*) - \{1, 2\} = \dfrac{1}{9}$.
3. $p(2\mathbb{N}) = \dfrac{1}{4}$.
4. $p(\{4q + 3 \mid q \in \mathbb{N}\}) = \dfrac{3}{40}$

Exercice 17

Tout d'abord, on constate, d'après leurs probabilités, que

$$p_{B_i}(A_k) = 0 \qquad \forall k > i$$

Soit $k, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} p_{A_k}(B_n) &= \frac{p(A_k \cap B_n)}{p(A_k)} = \frac{p_{B_n}(A_k)p(B_n)}{p(A_k)} \\ &= \frac{\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}p^n(1-p)}{p(A_k)} \end{aligned}$$

Or, comme $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a

$$\begin{aligned} p(A_k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} p(A_k \cap B_j) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_{B_j}(A_k)p(B_j) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} p_{B_j}(A_k)p(B_j) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k}\frac{1}{2^j}p^j(1-p) \\ &= (1-p)\sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^j \end{aligned}$$

Or, d'après les indications :

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}x^{j-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

D'où

$$\sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^j = \left(\frac{p}{2}\right)^k \frac{1}{(1-\frac{p}{2})^{k+1}} = \left(\frac{p}{2}\right)^k 2^{k+1}\frac{1}{(2-p)^{k+1}}$$

et donc

$$p(A_k) = (1-p)\left(\frac{p}{2}\right)^k 2^{k+1}\frac{1}{(2-p)^{k+1}} = 2(1-p)p^k\frac{1}{(2-p)^{k+1}}$$

En réinjectant, on trouve

$$\begin{aligned} p_{A_k}(B_n) &= \frac{\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}p^n(1-p)}{2(1-p)p^k\frac{1}{(2-p)^{k+1}}} \\ &= 2^{-n-1}(2-p)^{k+1}p^{n-k}\binom{n}{k} \end{aligned}$$

Exercice 18

Même principe que pour l'exercice 19 :

$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a

$$\begin{aligned} p(A_k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} p(A_k\cap B_j) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_{B_j}(A_k)p(B_j) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} p_{B_j}(A_k)p(B_j) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} p^k(1-p)^{j-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda}p^k\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{j!}{k!(k-j)!}(1-p)^{j-k}\frac{\lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda}p^k\frac{1}{k!}\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{1}{(k-j)!}(1-p)^{j-k}\lambda^j \end{aligned}$$

un changement de variable dans la somme donne :

$$\begin{aligned} p(A_k) &= e^{-\lambda}p^k\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}(1-p)^r\lambda^{r+k} \\ &= e^{-\lambda}(\lambda p)^k\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{r!}\left(\lambda(1-p)\right)^r \end{aligned}$$

grâce à la somme totale d'une série exponentielle, on obtient

$$p(A_k) = e^{-\lambda}(\lambda p)^k\frac{1}{k!}e^{\lambda(1-p)}$$

et donc

$$\boxed{p(A_k) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}}$$

Exercice 19

1.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ implique

$$b = 0$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ implique

$$a = \frac{1}{10}$$

2. ⋆ Limites :
On a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{10} & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ \frac{5}{10} & \text{si } 3 \leqslant x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

qui a été construire de façon à avoir

$$\lim_{-\infty} F = 0, \quad \lim_{+\infty} F = 1$$

⋆ Monotonie : F est clairement croissante.

⋆ Continuité : Par construction des inégalités, $(\dots \leqslant x)$ elle est également continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

⋆ F bornée entre 0 et 1 : Et pour finir, on a bien

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

⋆ Conclusion : En conclusion, F est bien une fonction de répartition.

3. F est une fonction en escalier de points de discontinuités $1, 3, 4$, ainsi

$$Supp(X) = \{1, 3, 4\}$$

avec

k	1	3	4
$P(X=k)$	$2a$	$3a$	$5a$

Exercice 20

1. On note $I = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
L'univers associé à cette expérience est

$$\Omega = \left\{\{i,j\} \mid i,j\in I,\ i\neq j\right\}$$

avec p la probabilité uniforme sur la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

On note à ce propos que

$$p(\{i,j\}) = \frac{1}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{1}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

2. Étant donné que p est la probabilité uniforme, il suffit de déterminer le nombre de cas favorables pour déterminer $p(X = k)$. Faisons le tableau des valeurs de X suivant les deux valeurs choisies :

	-2	-1	0	1	2
-2	–	2	0	-2	-4
-1	–	–	0	-1	-2
0	–	–	–	0	0
1	–	–	–	–	2
2	–	–	–	–	–

D'où la loi de probabilité de X :

k	-4	-2	-1	0	2
$p(X = k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$

4. X est une variable fini, donc son espérance existe et on la calcule avec la formule

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in Supp(X)} kP(X = k)$$

ce qui donne ici

$$\mathbb{E}[X] = -4\frac{1}{10} - 2\frac{2}{10} - 1\frac{1}{10} + 2\frac{2}{10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 21

1. On note $\mathcal{D}_i$ le $i^{\text{ème}}$ disque (en partant du centre.) et D_i l'événement :

$$D_i : \langle \text{tomber sur le disque } \mathcal{D}_i \rangle$$

D'après l'énoncé, la probabilité de tomber sur un des disques est proportionnelle à la surface de celui-ci. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(D_i) = k\frac{\pi R^2}{16}i^2$$

Comme on est certain de tomber sur un point de la cible, on a

$$P(D_4) = 1$$

d'où

$$k = \frac{1}{\pi R^2}$$

et donc

i	1	2	3	4
$p(D_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{9}{16}$	1

La fonction de répartition F_X de X est donc définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{16} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ \frac{9}{16} & \text{si } 3 \leqslant x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

2. On en déduit la loi de X :

i	1	2	3	4
$p(X = i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Exercice 22

1. Si $a \neq 0$, on a $p(aX + b \leqslant x) = p(X \leqslant \frac{x-b}{a}) = F(\frac{x-b}{a})$, d'où

$$F_{aX+b}(x) = F(\frac{x-b}{a})$$

Si $a = 0$, on a $p(aX + b \leqslant x) = p(b \leqslant x)$ d'où

$$F_b(x) = F_{\delta_b}$$

2. Si X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{4} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où

$$F_Y(x) = F_X(x-2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ \frac{\lfloor x-2 \rfloor}{n} & \text{si } 3 \leqslant x \leqslant n+2 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Quelle est la loi de Y ?