2 - Dénombrement

Modèles de base

Exercice 1: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – Soient n, p des entiers.
Quel est le cardinal des ensembles suivants :

1. $[\![1;n]\!]^p$

2. **a)** $A = \{(i_1, \dots, i_p) \mid i_k \in [\![1;n]\!]$ où les i_k sont 2 à 2 distincts.$\}$

b) $P = \{(i_1, \dots, i_n) \mid i_k \in [\![1;n]\!]$ où les i_k sont 2 à 2 distincts.$\}$

3. $C = \{\{i_1, \dots, i_p\} \mid \forall k = 1, \dots, p,\ i_k \in [\![1;n]\!]$ où les i_k sont 2 à 2 distincts.$\}$

Exercice 2: [Indications] [Correction] **"Modèle des urnes" :** Une urne contient n boules numérotées.

1. Combien y a t-il de manières d'effectuer

a) k tirages avec remise où l'on tient compte de l'ordre des tirages ?

b) k tirages sans remise où l'on tient compte de l'ordre des tirages ?

c) k tirages sans remise, et sans se soucier de l'ordre des tirages ?

2. Construire des fonctions Python d'argument k et n permettant de simuler l'ensemble des résultats de chacun de ces tirages. ☆

Exercice 3: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – **"Modèle des boites" :**
On dispose de n boites discernables.
Combien y a t-il de manières de répartir

1. k boules discernables entres elles dans ces boites, avec la possibilité de mettre plusieurs boules dans la même boite ?

2. k boules indiscernables dans ces boites, avec au moins une boule par boite ?

3. k boules indiscernables entres elles dans ces boites ? (avec la possibilité de mettre 0 boule dans les boites.)

4. k boules indiscernables entres elles dans ces boites, sans mettre deux boules ou plus dans la même boite ?

Exercice 4: [Indications] [Correction] – *Modéliser* –

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de $p-uplets$ $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que :

a) $i_1 + i_2 + \ldots + i_p = n$ avec $\forall k = 1 \ldots p,\ i_k \neq 0$

b) $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$

c) $i_1 + i_2 + \ldots + i_p = n$ (les i_k peuvent s'annuler)

d) $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n$

2. *Application :* Trois personnes A, B, C se partagent 7 pièces de 1 euros.

a) Combien de partages sont possibles si on autorise que certaines personnes n'aient rien ?

b) Combien y a-t-il de partages où chaque personne reçoit quelque chose ?

3. Établir les fonctions Python (d'argument p et n) permettant de simuler l'ensemble des p-listes demandées dans la question 1 (et accessoirement de les compter.) ☆

Exercice 5: [Indications] [Correction] Découper suivant une partition ☆
But : trouver le nombre de solutions de $x + 2y + z + t = 2n$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{N}$.

1. Établir un programme Python d'argument n permettant de donner le nombre de 4-uplets $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ solutions de l'équation $x + 2y + z + t = 2n$.
(On pourra vérifier qu'il y a 6 391 possibiliités pour $n = 20$.)

2. **a)** Discuter le cardinal de l'ensemble

$$E_y = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4 \text{ tels que } x + z + t = 2n - 2y\}$$

suivant les valeurs de $y \in \mathbb{N}$.

b) En décomposant suivant les ensembles E_y adéquates, répondre à la problématique.
(Suivant les raisonnements effectués, un changement de variable $k = n - y$ ou $k = n - y + 1$ peut accélérer le calculs.)

Exercice 6: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – ☆
Compter le nombre de résultats possibles en effectuant k tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées sans se soucier de l'ordre des tirages ?

Concrètement

Exercice 7: [Indications] [Correction] – *Modéliser* –
Les mousquetaires ont mélangé leur bottes dans le couloir de l'Auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend deux bottes au hasard. De combien de manières différentes peut-il associer

1. une vraie paire ?

2. deux bottes quelconques ?

3. deux bottes droites ?

4. deux bottes appartenant à deux personnes différentes ?

Exercice 8: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – On convient d'appeler "mot" n'importe quelle suite finie de lettre, même si celui-ci ne figure pas dans le dictionnaire.

1. Combien de mots de 8 lettres peut-on écrire avec les lettres A,B,C ?

2. Parmi eux combien contiennent :
   a) au moins une lettre A ?
   b) exactement une lettre A ?
   c) exactement 3 lettres A, 2 lettres B et 3 lettres C ?
   d) autant de lettre A que de lettre B ?

Exercice 9: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – Un paquet contient 3 feuilles vertes, 2 rouges et 5 blanches. On aimerait en faire un livret de 10 pages.

1. On suppose que les feuilles ne sont distinguables que par leur couleur. Déterminer le nombre d'agencement possibles tels qu'on alterne
   a) les feuilles colorées avec les feuilles blanches.
   b) comme dans la question précédente, mais également en alternant les feuilles vertes avec les feuilles rouges.
2. Reprendre la question en supposant que toutes les feuilles sont différentes.

Exercice 10: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – Combien y a-t-il de façon de répartir

1. 5 hommes et 4 femmes sur un banc comportant 9 places numérotées de 1 à 9 de telle manière que les femmes occupent les places paires ?
2. 3 hommes et 3 femmes autour d'une table ronde sans qu'une femme ne soit à coté d'une autre femme. (On rappelle qu'il n'y a ni début ni fin sur une table ronde ...)

Exercice 11: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – On considère les ensembles $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Combien existe-t-il d'applications de E dans F ?
2. Combien existe-t-il d'applications f de E dans F telles que $f(a) = 1$?
3. Combien existe-t-il d'applications injectives de E dans F ?
4. Combien existe-t-il d'applications surjectives de E dans F ?
5. Combien existe-t-il d'applications de $E \times F$ dans F^3 ?

Exercice 12: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Combien y a-t-il de surjections d'un ensemble de cardinal $n+1$ dans un ensemble de cardinal n ?

Exercice 13: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Calculer* – gestion des formules ensenblistes

1. Compter à l'aide de Python le nombre d'entiers qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 5 compris entre 1 et 210.
2. Prouver le résultat mathématiquement.
3. Compter maintenant le nombre d'entiers qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 5, ni par 7 compris entre 1 et 210 ?

Coefficients binomiaux

Exercice 14: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Modéliser* – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer

1. $C_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $C_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
2. $S_1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k}$ et $S_2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1}$
3. *Application :* Montrer qu'il y a autant de parties de $E = \{1, \ldots, n\}$ de cardinal pair d'éléments que de parties de cardinal impair.

Exercice 15: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Modéliser* – Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. À l'aide de la formule de Pascal, calculer $\sum_{k=n}^{2n} \binom{k-1}{n-1}$
2. Calculer de deux manières différentes combien de mots de $2n$ lettres on peut former avec n lettres A et n lettres B, puis retrouver la formule.

Exercice 16: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, où $n \geqslant p$.

1. À l'aide de la formule de Pascal, montrer que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$
2. Calculer $S' = \sum_{k=p}^{n} k\binom{k}{p}$. *(On rappelle que* $(k+1)\binom{k}{p} = (p+1)\binom{k+1}{p+1}$*)*.

Exercice 17: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Formule de Vandermonde

1. Montrer que, pour tout entier $n, m \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, m+n]\!]$, on a
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Quelques problèmes

Exercice 18: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – Dénombrement par récurrence et partition

Amélie monte les escaliers de son immeuble pour aller à son appartement. Au départ, elle est tout en bas (marche 0). Elle peut, selon son humeur, monter d'une ou deux marches d'un coup sans jamais redescendre.

1. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de façons dont elle peut enchaîner les franchissements d'une ou deux marches pour arriver à la marche n.
   a) Déterminer une relation de récurrence entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.
   b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle s le nombre de sauts de deux marches que peut faire Amélie pour atteintre la marche numéro n.
   a) Quelles sont les valeurs possibles pour s ?
   b) Calculer en fonction de s le nombre de pas nécessaires pour atteindre la case numéro n.
   c) Déterminer le nombre de façons d'atteindre la marche numéro n, en faisant s sauts de deux marches.
   d) En déduire, en fonction de n, la valeur de $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$.

Exercice 19: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – "une alternative au Problème de Galilée"

Georges et Méré jouent au 421 sur le comptoir d'un bar. Une discussion s'engage sur deux paradoxes.

1. Pourquoi, en lançant 3 dés, obtient-on plus souvent une somme de 10 que 12 alors qu'il y a autant de combinaison pour obtenir chaque résultat ?

2. Est-il plus fréquent d'obtenir au moins un 6 en lançant 6 fois un dé que d'obtenir au moins deux 6 en lançant 12 fois un dé ?

(Vous pouvez utiliser Python pour répondre aux questions.)

Exercice 20: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – On jette 4 dés. Dans combien de cas la somme de deux dés est-elle égale à la somme des deux autres ? (On pourra faire le raisonnement "à la main" ou avec Python.)

Exercice 21: [Indications] [Correction] *(ENS)* – *Modéliser* – On dispose de a lettres A et b lettres B, avec ces $n = a + b$ lettres on forme un " mot ".

1. Combien de mots distincts peut-on former ?

2. Généraliser au cas de k lettres.

3. En déduire la formule : ☆

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} \frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$$

Exercice 22: [Indications] [Correction] – *Modéliser* –

1. Compter à l'aide Python le nombre d'entiers compris entre 1 et $10^{10} - 1$ dont le cube se termine par 11 ?

2. *(ENS)* Prouver le résultat mathématiquement.

Exercice 23: [Indications] [Correction] *(ENS)* – *Calculer* – *Modéliser* – Nombre de dérangements ☆

On se donne n objets numérotés de 1 à n que l'on souhaite ranger sur n places numérotées de 1 à n. On appelle *dérangement sans coïncidence* tout placement de ces n objets sans qu'aucun d'eux ne soit à la place de son numéro.

1. Calculer le nombre D_n de dérangements sans coïncidence.

2. On appelle *dérangement avec k coïncidence* tout placement de ces n objets où exactement k objets sont à la place de leur numéro. On note $D_{n,k}$ le nombre de dérangement avec k coïncidences possibles. Justifier les égalités ci-dessous :
   a) $D_{n,n} = 1 \; ; \quad D_{n,n-1} = 0$
   b) $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k}$.
   c) $\sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = n!$.

3. *Application :* Si un facteur distribue le courrier à 5 personnes au hasard. Combien y a-t-il de possibilités pour
   a) qu'aucune des personnes ne reçoive son courrier ?
   b) Au moins deux personnes recoivent leur courrier ?

Indications

Exercice 5 [Correction]

2. **b)** On pensera à se servir de la partition des (E_y).

Exercice 6 [Correction]

On peut par exemple se ramener à l'étude de l'ensemble $E = \{(\underbrace{1,\dots,1}_{N_1 \text{ fois}}, \underbrace{2,\dots,2}_{N_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{n,\dots,n}_{N_n \text{ fois}}) \mid N_1 + N_2 + \dots N_n = k\}$.

Exercice 7 [Correction]

Les mousquetaires sont 4 en tout ....

Exercice 12 [Correction]

Considérer la liste des $n+1$ images des éléments de l'ensemble de départ.

Exercice 13 [Correction]

2. Calculer le cardinal de l'ensemble $M_2 \cup M_5$, où M_i désigne l'ensemble des multiples de i dans $[\![1; 210]\!]$.

3. Commencer par trouver une formule pour le cardinal de $M_2 \cup M_5 \cup M_7$.

Exercice 14 [Correction]

2. Calculer $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$

3. Penser à établir une partition des possibilités en se servant des questions précédentes.

Exercice 15 [Correction]

2. On pourra par exemple faire une partition suivant le nombre exact de B au début du mot.

Exercice 16 [Correction]

2. Se ramener à la question précédente : penser à dire que $k = (k+1) - 1$!

Exercice 18 [Correction]

1. a) On pourra découper les possibilités en deux événements : $A =$ "la marche précédente est $n+1$" et $B =$ "la marche précédente est n."

Exercice 19 [Correction]

1. Observer les résultats obtenus pour chaque dé.

Exercice 23 [Correction]

1. On passe par l'événement contraire.
   On note A_i l'ensemble des permutations pour lesquelles l'objet i est à la place i. Le nombre cherché est donc le cardinal de l'ensemble $\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n}$. Penser à la formule du crible.

Exercice 1

1. card $[\![1;n]\!]^r = n^p$

2. a) $\text{card} A = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \end{cases}$

b) C'est le nombre de permutations de n éléments, c'est-à-dire $\boxed{n!}$.

3. C'est le nombre de combinaison de p éléments parmi n, c'est-à-dire $\boxed{\binom{n}{p}}$.

Exercice 2

1. a) n^k

b) $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

c) $\binom{n}{k}$

2. On propose les programmes suivants :

```
# k tirages avec remise et ordre

def tirages_avec_remise(k,n):
    """Simule k tirages avec remise de boules
       numérotées de 1 à n."""
    L=[[i+1] for i in range(n)]
    for _ in range(k-1): # on passe dans la boucle
       k-1 fois
        Laux=[]
        for l in L: # chaque liste l déjà crée, on
           rajoute toutes les possibilités
            for j in range(1,n+1):
                Laux+=[l+[j]]
        L=Laux
    return(L)
```

```
# k tirages sans remise et avec ordre

def tirages_sans_remise(k,n):
    """Simule k tirages avec remise de boules
       numérotées de 1 à n."""
    L=[[i+1] for i in range(n)]
    for _ in range(k-1): # on passe dans la boucle
       k-1 fois
        Laux=[]
        for l in L: # chaque liste l déjà crée, on
           rajoute toutes les possibilités
            # On créer la liste de tous les nombres
               possibles restants
            Possibles=[p for p in range(1,n+1)]
            for x in l:
                Possibles.remove(x)
            # maintenant, Possibles est constitué
               de tous les compléments acceptables
               pour l
            for j in Possibles:
                Laux+=[l+[j]]
        L=Laux
    return(L)
```

Pour les tirages sans remise et sans ordre, on peut par exemple prendre ceux qui sont avec ordre et retirer ceux qui sont en trop (pas très optimal parce que prend beaucoup de temps, mais voyons comment faire :)

```
# k tirages sans remise et sans ordre

def tirages_sans_remise_sans_ordre(k,n):
    # On commence par simuler tous les tirages avec ordre
    LOrdre=tirages_sans_remise(k,n)
    # On va éliminer ceux qui sont redondants
    LOk=[LOrdre[0]]
    for l in LOrdre:
        # On vérifie si l est dans LOk dans le désordre
        Present=False
        for liste in LOk: # on parcourt LOk
            Egal=True
            for x in l:
                if not(x in liste):
                    Egal=False
                # Sinon, tous les éléments de l sont dans liste. Comme il n'y a pas de doublons possibles, c'est fini.

            if Egal: # Signifie que l est déjà représenté.
                Present=True
        if not(Present):
            LOk+=[l]
    return(LOk)
```

Sinon, une autre technique serait se dire qu'il y a une seule façon de classer un ensemble d'éléments deux à deux distincts par ordre strictement. On va donc modéliser l'ensemble des k-listes strictements croissantes constituée d'éléments dans $[\![1,n]\!]$. On se rapproche donc de la modélisation de l'exercice 4, question 1b.

Exercice 3

1. On peut faire une liste : à chaque boule on associe sa boite, autrement dit, c'est la cardinal de $[\![1,n]\!]^k$, autrement dit, $\boxed{n^k.}$
Le programme suivant donne l'ensemble des possibilités :

```
def repartition_boules_discernables(k,n):
    """rend l'ensemble des possibilités de répartition de k boules dans n boites avec plusieurs possibilités dans la même boite."""

    L=[[x] for x in range(1,n+1)] # Initialisation : la boule 1 choisit sa boite.
    for i in range(2,k+1): # on passe en revue chaque boule
        aux=[]
        for l in L:
            for j in range(1,n+1): # tous les numéros de boite sont possibles
                aux+=[l+[j]]
        L=aux
    return([L,len(L)])
```

et le programme suivant rend une simulation au hasard :

```
import random as rd

def choisit_repartition_boules_discernable(k,n):
    """Rend une possibilité au hasard parmi l'ensemble de toutes les répartitions possibles de k boules dans n boites."""
    return([rd.randint(1,n) for _ in range(1,n+1)])
```

2. Remarquons tout d'abord qu'il faut au moins n boules pour mettre au moins une boule par boite, c'est-à-dire

$$k \geqslant n$$

(sinon, il y a 0 possibilités.)

Représentons les boules (non discernables) par un point. En les mettant sur une ligne, un trait de séparation représente la délimitation entre les boites :

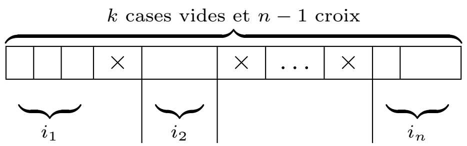
$$\overbrace{\underbrace{\bullet}_{i_1} \quad | \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet}_{i_2} \quad | \quad \underset{\dots}{\dots} \quad | \quad \underbrace{\bullet}_{i_n}}^{k}$$

où i_r représente alors le nombre de boules présentes dans l'urne $n^o\, r$.

L'ensemble demandé est donc en bijection avec toutes les configurations de points et de traits ci-dessus. Il s'agit donc du nombre de choix de $p-1$ traits dans $n-1$ emplacements, d'où $\boxed{\binom{k-1}{n-1}}$.

$$\boxed{\binom{k-1}{n-1} \text{ possibilités}}$$

3. Compter le nombre de répartitions de n boules dans p boites possibles revient à compter le nombre de modélisations possibles suivantes :



où chaque case vide représente une boule et chaque croix représente une séparation entre deux urnes.
Une possibilité correspond donc au choix de placement des $n-1$ croix parmi $n-1+k$ emplacements. D'où

$$\boxed{\binom{n-1+k}{n-1} \text{ possibilités}}$$

4. Le modèle précédent ne fonctionne plus. Par contre, on peut, pour chaque boite, dire si elle contient ou non une boule. L'ensemble des résultats est donc en bijection avec l'ensemble

$$\{(i_1, \dots, i_n) \mid i_k = 0;1 \text{ et } i_1 + \dots + i_n = k\}$$

C'est l'ensemble de toutes les permutations du n-uplet $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 0, \dots 0)$. Il y a donc $\boxed{\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$ possibilités.

Exercice 4

1. a) $\underline{i_1 + i_2 + \dots + i_p = n \text{ avec } \forall k = 1 \dots p,\ i_k \neq 0 :}$

• Méthode 1 :
L'ensemble est en bijection avec

$$\{(\underbrace{x_1}_{i_1}, \underbrace{x_2}_{i_1+i_2}, \dots, \underbrace{x_{p-1}}_{i_1+\dots i_{p-1}}) \mid 0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < n\}$$

c'est-à-dire avec

$$\{(x_1, \dots, x_{p-1} \mid 1 \leqslant x_1 < \dots < x_{p-1} \leqslant n-1\}$$

Sont cardinal est donc $\boxed{\binom{n-1}{p-1}}$.

• Méthode 2 :
On représente en ligne n points qui représentent chacun un entier. Ensuite, on choisit de placer entre ces points $p-1$ traits de séparation de la manière suivante :

$$\overbrace{\underbrace{\bullet}_{i_1} \quad \mid \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet}_{i_2} \quad \mid \quad \dots \quad \mid \quad \underbrace{\bullet}_{i_p}}^{n}$$

$$i_1 \quad + \quad i_2 \quad + \ \dots\ + \quad i_p \quad = n$$

L'ensemble demandé est donc en bijection avec toutes les configurations de points et de traits ci-dessus. Il s'agit donc du nombre de choix de $p-1$ traits dans $n-1$ emplacements, d'où $\boxed{\binom{n-1}{p-1}}$.

• Méthode 3 :
On représente en ligne n points qui représentent chacun un entier. Ensuite, on choisit de placer entre ces points $p-1$ traits de séparation de la manière suivante :

$$\overbrace{\underbrace{\bullet}_{i_1} \quad \mid \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet}_{i_2} \quad \mid \quad \dots \quad \mid \quad \underbrace{\bullet}_{i_p}}^{n}$$

$$i_1 \quad + \quad i_2 \quad + \ \dots\ + \quad i_p \quad = n$$

L'ensemble demandé est donc en bijection avec toutes les configurations de points et de traits ci-dessus. Il s'agit donc du nombre de choix de $p-1$ traits dans $n-1$ emplacements, d'où $\boxed{\binom{n-1}{p-1}}$.

b) $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$:

• Méthode 1 :
Cet ensemble est en **bijection avec l'ensemble des choix de p éléments parmi** n : Chaque combinaison de p éléments parmi n correspons à un seul et unique classement de ces nombres par ordre croissant. Le cardinal est donc $\boxed{\binom{n}{p}}$.

• Méthode 2 :
On représente en ligne n points qui représentent chacun un entier. Ensuite, on choisit de placer entre ces points $p-1$ traits de séparation de la manière suivante :

$$\overbrace{\underbrace{\underbrace{\bullet}_{i_1} \quad \mid \quad \bullet \quad \bullet}_{i_2} \quad \mid \quad \dots \quad \mid \quad \bullet}^{n}$$

L'ensemble demandé est donc en bijection avec toutes les configurations de points et de traits ci-dessus. Il s'agit donc du nombre de choix de $p-1$ traits dans $n-1$ emplacements, d'où $\boxed{\binom{n-1}{p-1}}$.

c) $i_1 + i_2 + \ldots + i_p = n$:

• Méthode 1 :
L'ensemble est en bijection avec

$$\{(\underbrace{x_1}_{i_1}, \underbrace{x_2}_{i_1+i_2}, \ldots, \underbrace{x_{p-1}}_{i_1+\ldots+i_{p-1}}) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{p-1} \leqslant n\}$$

Sont cardinal est donc $\boxed{\binom{n+p-1}{p-1}}$.

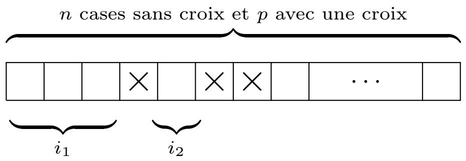
• Méthode 2 : (en fait, même idée)
Étant donnée que, dans le représentation avec les points, on ne peut pas mettre deux barres au même endroit (qui représenterait $i_k = 0$, on choisit de rajouter des points de la manière suivante :

$$\overbrace{\underbrace{\bullet}_{} \quad \mid \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet}_{} \quad \mid \quad \dots \quad \mid \quad \underbrace{\bullet}_{}}^{n+p}$$

$$i_1+1 \qquad i_2+1 \qquad \ldots \qquad i_p+1 \ = n+p$$

Pour assurer le fonctionnement, il fait p points supplémentaires. Cette fois ci, on a donc toujours $p-1$ traits à placer parmis $n+p-1$ places.

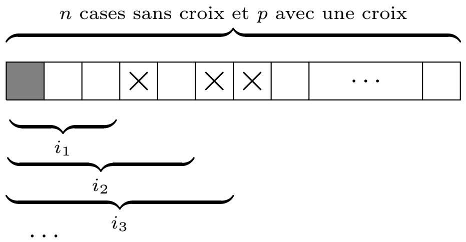
• Méthode 3 :



d) $\underline{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n}$:

• Méthode 1 :

Chaque élément de $\Omega = \{(i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n\}$ peut être modélisé par le schéma suivant :



où i_k est le nombre de cases sans croix entre le début (à gauche) et la $k^{\text{ème}}$ croix (ou la fin), et ceci pour k allant de 1 à p.
De plus, comme $i_1 \geqslant 1$, la première croix est forcément placée après la première case.
Compter le nombre de possibilités revient donc à choisir le nombre de choix possibles de placements des p croix parmi les $n+p-1$ cases libres, d'où

$$\boxed{\binom{n+p-1}{p} \text{ possibilités}}$$

• Méthode 2 :

L'ensemble est en bijection avec

$$\{(i_1, \ldots, i_p) \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 + 1 < \ldots < i_p + p - 1 \leqslant n + p - 1\}$$

Son cardinal est donc $\boxed{\binom{n+p-1}{p}}$.

2. a) On cherche le cardinal de l'ensemble $\{(n_A, n_B, b_c \mid n_A + n_B + n_C = 7\}$. D'après la question 1c), on sait que le nombre de pargages possibles est alors

$$\boxed{\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36}$$

b) Même principe, c'est cette fois-ci la formule de la question 1b) :

$$\boxed{\binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15}$$

3. On propose les programmes suivants :

```python
def nb_suites_strict_croissantes(p,n):
    """Rend les p-listes strictement croissantes de nombres entiers compris entre 1 et n et leur nombre"""
    L=[[x] for x in range(1,n-p+2)]
    for k in range(2,p+1):
        Laux=[]
        for l in L: # est la liste de toutes les possibilités d'indices [i1,...,i_(k-1)]
            # Valeurs possibles de ik : de l[-1]+1 à n-p+k
            for x in range(l[-1]+1,n-p+k+1): # Si l[-1] est déjà trop grand, il ne se passe rien et l est éliminé
                Laux+=[l+[x]]
        L=Laux
    # On compte le nombre de résultats
    return(L,len(L))
```

```python
def nb_suites_croissantes(p,n):
    """Rend les p-listes croissantes de nombres entiers compris entre 1 et n et leur nombre"""
    L=[[x] for x in range(1,n+1)]
    for k in range(2,p+1):
        Laux=[]
        for l in L: # est la liste de toutes les possibilités d'indices [i1,...,i_(k-1)]
            # Valeurs possibles de ik : de l[-1] à n
            for x in range(l[-1],n+1):
                Laux+=[l+[x]]
        L=Laux
    # On compte le nombre de résultats
    return(L,len(L))
```

```python
def listes_sommes_non_nulles(p,n):
    """Rend les p-listes d'entier strictement positifs dont la somme fait n et leur nombre """
    L=[[x] for x in range(1,n+2-p)]

    # On construit la liste de toutes les possibilités jusqu'à i_(p-1)
    for k in range(2,p):
        Laux=[]
        for l in L: # est la liste de toutes les possibilités d'indices [i1,...,i_(k-1)]
            # Valeurs possibles de ik : de 1 à n-sum(L)
            for x in range(1,n-sum(l)+1):
                Laux+=[l+[x]]
        L=Laux

    # le dernier est forcément n-(somme des autres)
    Laux=[]
    for l in L:
        ip=n-sum(l)
    if ip!=0:
            Laux+=[l+[ip]]
    L=Laux

    # On compte le nombre de résultats
    return(L,len(L))
```

```python
def listes_sommes(p,n):
    """Rend les p-listes d'entier >=0 dont la somme fait n et leur nombre"""
    L=[[x] for x in range(n+1)]

    # On construit la liste de toutes les possibilités jusqu'à i_(p-1)
    for k in range(2,p):
        Laux=[]
        for l in L: # est la liste de toutes les possibilités d'indices [i1,...,i_(k-1)]
            # Valeurs possibles de ik : de 1 à n-sum(L)
            for x in range(n-sum(l)+1):
                Laux+=[l+[x]]
        L=Laux

    # le dernier est forcément n-(somme des autres)
    Laux=[]
    for l in L:
        Laux+=[l+[n-sum(l)]]
    L=Laux

    # On compte le nombre de résultats
    return(L,len(L))
```

On peut tester avec l'exemple 1 de la question 2 :

```python
listes_sommes_non_nulles(4,50)
```

On obtient bien

$$18\,424$$

Exercice 5

1.

```python
def x2yzt(n):
    nb_solu=0
    y=0
    for x in range(2*n+1):
        # on a 2y+z+t=2*n-x, donc 2y vaut au maximum 2n-x
        while 2*y<=2*n-x:
            for z in range(2*n-x-2*y+1):
                # t est compris entre 0 et 2n-x-2*y-z.
                # il y a donc
                nb_solu+=2*n-x-2*y-z+1
            y+=1
    return(nb_solu)
```

2. a)

- <u>Si $y > n$,</u>

  on voit que le terme de droite est négatif, il n'y a donc aucune solution, i.e.

$$\text{card}\, E_y = 0$$

- <u>Si $y \leqslant n$,</u>

  On pose $k = 2n - 2y \geqslant 0$. Un des exercices précédents nous dit alors que

$$\text{card}\, E_k = \binom{k+3-1}{3-1} = \binom{k+2}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{(2n-2y+2)(2n-2y+1)}{2}$$

i.e.

$$\boxed{\text{card}\, E_k = \begin{cases} 0 & \text{si } y > n \\ (n-y+1)(2n-2y+1) & \text{si } y \leqslant n \end{cases}}$$

b) On a

$$2y = 2n - x - z - t$$

et comme tous les termes sont positifs ou nuls, on voit que $2y$ peut prendre toutes les valeurs paires de 0 à $2n$, autrement dit,

$$y \in [\![0, n]\!].$$

Ainsi, $(A_y)_{y\in[\![0,n]\!]}$ est une partition de l'ensemble des possibilités. Ainsi, Donc le nombre de possibilités est

$$\begin{aligned} S &= \sum_{y=0}^{n} \text{card}\, E_y \\ &= \sum_{y=0}^{n} (n-y+1)(2n-2y+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k(2k-1) \text{changement de var. } k = n-y+1 \\ &= 2\sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^{n+1} k \\ &= 2\tfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} - \tfrac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= 2\tfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \tfrac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= (n+1)(n+2)\tfrac{4n+3}{6} \end{aligned}$$

Conclusion : on a

$$\boxed{(n+1)(n+2)\frac{4n+3}{6} \quad \text{possibilités}}$$

Exercice 6

Comme les tirages sont avec remise et sans ordre, l'ensemble des résultats possibles est en bijection avec l'ensemble

$$E = \{(\underbrace{1,\ldots,1}_{N_1 \text{ fois}}, \underbrace{2,\ldots,2}_{N_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{n,\ldots,n}_{N_n \text{ fois}}) \mid N_1 + N_2 + \ldots N_n = k\}$$

Autrement dit, il y autant de solutions que de répartition des nombres $N_1, N_2, \ldots, N_n$ de somme n.
On peut donc se ramener aux exercices précédemment traités. Le nombre de possibilités est donc de

$$\boxed{\tbinom{(k+1)+(n-1)-1}{n-1} = \tbinom{k+n-1}{n-1}}$$

Exercice 7

1. Il y a $\boxed{4}$ vraies paires !

2. Pour associer deux bottes quelconques, on pioche n'importe lesquelles dans le tas de 8 chaussures :

$$\boxed{\binom{8}{2} = 28 \text{ possibilités}}$$

3. Il y a 4 bottes droites. Il faut en pioches deux parmi celles-ci, d'où $\boxed{\binom{4}{2} = 6 \text{ possibilités}}$

4. Pour associer deux bottes appartement à deux personnes différentes, on en prend déjà une première, (donc 8 possibilités). Il en reste maintenant 7, dont 6 appartiennent à d'autres personnes. On a donc en tout

$$\boxed{8 \times 6 = 48 \text{ possibilités}}$$

Exercice 8

1. Ce sont des 8-listes de 3 éléments où, pour chaque emplacement, on choisit la lettre voulue. Cela donne $\boxed{3^8}$ possibilités.

2. a) C'est l'événement contraire de "pas de lettre A". On a donc $\boxed{3^8 - 2^8}$ possibilités.
   b) On choisit l'emplacement de la lettre A et les 7 lettres restantes sont à choisir parmis B,C. Il y a donc $\boxed{8.2^7}$ possibilités.
   c) Ce sont toutes les permutations du mot AAABBCCC. Autrement dit, il y a $\dfrac{8!}{3!2!3!} = \boxed{560}$ possibilités.
   d) On compte les possibilités et leurs permutations. On trouve $1 + \dfrac{8!}{6!} + \dfrac{8!}{2!2!4!} + \dfrac{8!}{3!3!2!} + \dfrac{8!}{4!4!} = \boxed{2437}$

Exercice 9

1. a) Alternance feuilles colorées / feuilles blanches sans distinction :

Il y a 5 feuilles colorées (C) et 5 feuilles blanches (B). Il y a donc deux situations possibles : on commence par les feuilles blanches ou par les feuilles colorées.

$$C\ B\ C\ B\ \ldots C\ B \qquad \text{ou} \qquad B\ C\ B\ C\ \ldots\ B\ C$$

On pourrait penser qu'il n'y a ques deux solutions, mais **attention,** on distingue encore les feuilles colorées entre elles.

Dans chaque cas, il faut donc encore compter le nombre d'agencement des feuilles colorées, qui correspond au choix des emplacements des rouges dans les 5 emplacements possibles. (Fonctionne aussi avec les verts...bien entendu ...) :

$$\binom{5}{2}$$

Il n'y a donc que $\boxed{2 \times \binom{5}{2} = 20 \text{ possibilités}}$.

b) Alternance feuilles vertes / feuilles rouges sans distinction :

L'alternance des feuilles colorées ne peut être que

$$V\ R\ V\ R\ V$$

Là aussi, on pourrait penser qu'il n'y a qu'une seulle possibilité, mais attention, il faut encore placer les feuilles blanches ! On a donc

$$\boxed{\binom{10}{5} = 252 \text{ possibilités}}$$

2. • Alternance feuilles colorées / feuilles blanches avec distinction :

On est toujours en présence des cas

$$C\ B\ C\ B\ \dots C\ B \qquad \text{ou} \qquad B\ C\ B\ C\ \dots\ B\ C$$

Cette fois ci, pour chaque cas, il faut tenir compte non seulement de l'emplacement des feuilles rouges dans les 5 emplacements :

$$\binom{5}{2}$$

mais aussi des permutations des feuilles blanches entre elles :

$$5!$$

puis, de la permutations des feuilles rouges entre elles :

$$2!$$

et des feuilles vertes entre elles :

$$3!$$

D'où

$$\boxed{2 \times \binom{5}{2} \times 5! \times 2! \times 3! = 57\,600 \text{ possibilités}}$$

• Alternance feuilles colorées / feuilles blanches avec distinction :

Comme avant, on prend pour chaque cas sans distinction, il faut encore compter toutes les permutations possibles, d'où

$$\boxed{\binom{10}{5} \times 5! \times 2! \times 3! = 362\,880 \text{ possibilités}}$$

Exercice 10

1. Il s'agit de répartir les 4 femmes sur les 4 places paires et les 5 hommes sur les 5 places impaires. Il y a donc $\boxed{4!5! = 24 \times 120 = 2880}$ possibilités.

2. On peut numéroter les chaises autour de la table. Il faut donc par exemple placer les femmes soit sur toutes les places paires ($\underbrace{3!}_{hommes} \times \underbrace{3!}_{femmes}$ possibilités) puis tenir compte de la rotation autour de la table. (On peu comprendre qu'un placement est le même que celui ou la succession des personnes est la même, mais décalée d'une rangée...) Il faut donc diviser par 3 décalages le nombre trouvé. Il y a donc au total $\boxed{\dfrac{3!.3!}{3} = 12}$ possibilités.

Exercice 11

1. C'est le cardinal de l'ensemble $\{(i,j,k) \mid i,j,k = 1,\dots,5\} = [\![1,5]\!]^5$. Il y a donc $\boxed{5^3}$ applications.

2. Par le même principe que précédemment, on trouve $\boxed{5^2 = 25}$ applications.

3. Si les applications sont injectives, cela signifie que l'on ne retrouve pas deux fois le même nombre. Le nombre d'applications possibles est $\boxed{A_5^3 = \dfrac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60}$

4. Il n'y en a pas.

Exercice 12

L'ensemble des surjections est en bijection avec l'ensemble des permutations des (n+1)-uplets $(1,\dots,n,a)$ où $a \in [\![1;n]\!]$. (Les images des n premiers éléments avec une image forcément redondante.) Il y a donc

$$\boxed{\frac{n(n+1)!}{2}}$$

possibilités.

Exercice 13

1. On trouve

$$\boxed{94}$$

2. On passe par le complémentaire. On note M_i désigne l'ensemble des multiples de i dans $[\![1;210]\!]$.
(On remarque que $210 = 7 \times 5 \times 3 \times 2$, ce qui nous permet de faire facilement les calculs qui vont suivre...) On sait que

$$|M_2 \cup M_5| = |M_2| + |M_5| - |M_2 \cap M_5|$$

Or, $|M_2| = \frac{210}{2} = 105$, $\quad |M_5| = \frac{210}{5} = 42$, $\quad |M_2 \cap M_5| = \frac{210}{10} = 21$.
En conclusion, on obtient

$$|M_2 \cup M_5| = 126$$

et finalement, le nombre d'entiers non divisibles par 2,5 entre 1 et 210 est

$$\boxed{210 - 126 = 94}$$

3. En généralisant la formule du cas de 2 ensembles, on trouve

$$\begin{aligned}|M_2 \cup M_5 \cup M_7| &= |(M_2 \cup M_5) \cup M_7 \\ &= |M_2 \cup M_5| + |M_7| - |(M_2 \cup M_5) \cap M_7| \\ &= |M_2| + |M_5| - |M_2 \cap M_5| - |(M_2 \cap M_7) \cup (M_5 \cap M_7)| \\ &= |M_2| + |M_5| - |M_2 \cap M_5| - (|M_2 \cap M_7| + |M_5 \cap M_7| - |M_2 \cap M_7 \cap M_5|)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|M_2 \cup M_5 \cup M_7| = |M_2| + |M_5| + |M_7| - |M_2 \cap M_5| - |M_5 \cap M_7| - |M_7 \cap M_2| + |M_2 \cap M_5 \cap M_7|$$

Or, $|M_2| = \frac{210}{2} = 105$, $|M_5| = \frac{210}{5} = 42$, $|M_7| = \frac{210}{7} = 30$, $|M_2 \cap M_5| = \frac{210}{10} = 21$, $|M_5 \cap M_7| = \frac{210}{35} = 6$, $|M_7 \cap M_2| = \frac{210}{14} = 15$, $|M_2 \cap M_5 \cap M_7| = \frac{210}{70} = 3$.
En conclusion, on obtient

$$|M_2 \cup M_5 \cup M_7| = 138$$

et finalement, le nombre d'entiers non divisibles par 2,5,ou 7 entre 1 et 210 est

$$\boxed{210 - 138 = 72}$$

Exercice 14

1. Méthode 1 : Très rapidement, avec la formule du binôme : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.
On prend $w = 1$ et $x = 0$, on obtient

$$\boxed{C_1 = 2^n \quad \text{et} \quad C_2 = 0}$$

2. $S_1 + S_2 = C_1 = 2^n$ et $S_1 - S_2 = C_2 = 0$.

$$\boxed{S_1 = S_2 = 2^{n-1}}$$

3. C'est la traduction en terme combinatoire de la question précédente : S_1 est le nombre de parties de cardinal pair et S_2 de cardinal impair.

Exercice 15

1. On sait bien que, pour tout $k \geqslant n+1$, ok a

$$\binom{k-1}{n-1} + \binom{k-1}{n} = \binom{k}{n}$$

si $k = n$, on constate que cette formule est encore valable avec

$$\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n} = 1 + 0 = \binom{n}{n},$$

d'où, pour tout $k \geqslant p$, $\binom{k-1}{n-1} = \binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}$. En réinjectant dans la somme, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2n} \binom{k-1}{n-1} &= \sum_{k=n}^{2n} \left(\binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} - \sum_{k=n}^{2n} \binom{k-1}{n} \\ &= \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} - \sum_{k=n-1}^{2n-1} \binom{k}{n} \\ &= \binom{2n}{n} - \binom{n-1}{n} = \binom{2n}{n}\end{aligned}$$

2. Méthode 1 :
Si on a placé les n lettres A parmis les $2n$ possibilités, les lettres B complètent automatiquement. On a donc $\binom{2n}{n}$ mots possibles.

Méthode 2 :
Le nombre de possibilités est décomposé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=0}^{n} \text{card}\{(\overbrace{\underbrace{B\ldots B}_{k \text{ fois}} A * \ldots *}^{2n})\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{2n-k-1}{n-1}}_{\text{choix de l'emplacement des } A} \quad = \sum_{k=n}^{2n} \binom{k-1}{n-1}\end{aligned}$$

Exercice 16

1. On sait bien que, pour tout $k \geqslant p+1$, ok a

$$\tbinom{k}{p}+\tbinom{k}{p+1}=\tbinom{k+1}{p+1}$$

si $k = p$, on constate que cette formule est encore valable avec

$$\tbinom{p}{p}+\tbinom{p}{p+1}=1+0=\tbinom{p+1}{p+1},$$

d'où, pour tout $k \geqslant p$, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$. En réinjectant dans la somme, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n}\tbinom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n}\left(\tbinom{k+1}{p+1}-\tbinom{k}{p+1}\right)\\ &= \sum_{k=p}^{n}\tbinom{k+1}{p+1}-\sum_{k=p}^{n}\tbinom{k}{p+1}\\ &= \sum_{k=p+1}^{n+1}\tbinom{k}{p+1}-\sum_{k=p}^{n}\tbinom{k}{p+1}\\ &= \tbinom{n+1}{p+1}-\tbinom{p}{p+1}=\tbinom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n}k\tbinom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n}\left((k+1)\tbinom{k}{p}-\tbinom{k}{p}\right)\\ &= \sum_{k=p}^{n}\underbrace{(k+1)\binom{k}{p}}_{=(p+1)\binom{k+1}{p+1})}-\sum_{k=p}^{n}\tbinom{k}{p}\\ &= (p+1)\sum_{k=p}^{n}\tbinom{k+1}{p+1}-\sum_{k=p}^{n}\tbinom{k}{p}\\ &= (p+1)\sum_{k=p+1}^{n+1}\tbinom{k}{p+1}-\sum_{k=p}^{n}\tbinom{k}{p}\end{aligned}$$

Grâce à la question précédente, on sait que $\sum\limits_{k=p+1}^{n+1}\binom{k}{p+1} = \binom{n+2}{p+2}$ et $\sum\limits_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n}k\tbinom{k}{p} &= (p+1)\underbrace{\binom{n+2}{p+2}}_{\frac{n+2}{p+2}\binom{n+1}{p+1}}-\tbinom{n+1}{p+1}\\ &= \left(\tfrac{(n+2)(p+1)}{p+2}-1\right)\tbinom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

Exercice 17

1. On utilise le développement en formule de Newton de

$$(x+y)^{m+n} = (x+y)^m(x+y)^n$$

ou deux mnaières distinctes de choisir k éléments parmis $m+n$:
choisir les éléments parmis m et parmis n.

2. Dans l'égalité précédente, on remplace k par n, et on pose $m = n$ on trouve

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$$

ce qui est l'identité cherchée.

Exercice 18

1. a) On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on note E_{n+2} l'ensemble de toutes les possibilités pour aller de 0 à $n+2$. Pour simplifier ceci, on peut décomposer en deux sous-ensembles :

$$E_{n+2} = A \sqcup B$$

où $A =$ "la marche précédente est $n+1$" et $B =$"la marche précédente est n."
De cette décomposition, on déduit

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

b) Sachant que $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$. (a_n) est une suite de Fibonacci.

$$a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

2. a) s peut prendre les valeurs de 0 à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

b) Nombre de pas nécessaires pour aller à n :

$$\underbrace{s}_{\text{saut de 2}} + \underbrace{(n-2s)}_{\text{sauts de 1}} = n-s$$

c) Soit S_s l'ensemble des sauts possibles sachant qu'il y a s sauts de deux marches. On peut modéliser ceci par une liste de $n-s$ éléments choisis parmis 1 et 2. Pour désigner le nombre de marches franchies. Il y a donc

$$\boxed{\tbinom{n-s}{s} \text{ tels choix possibles}}$$

(choix de l'emplacement des 2 dans cette liste).

d) Le problème se décompose de la manière suivante :

$\star$ *D'une part,*

On note P l'ensemble de toutes les possibilités. On va décomposer ceci en fonction du nombre s du saut de deux marches. On a

$$P = \bigsqcup_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S_s$$

Ainsi,

$$\text{card}P = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{card}S_s = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-s}{s}$$

$\star$ *D'autre part,*

on rappelle que

$$\text{card}P = a_n$$

D'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Exercice 19

1. Un algorithme Pyhton (ou un comptage à la main) permet de constater que si on distingue les 3 dés, on a 27 possibilités pour obtenir une somme de 10, alors qu'on en a seulement 25 pour 12. En revanche, si on ne distingue pas les dés, on a bien 6 possibilités pour chacun.
Or, en réalité, les dés sont bien disctincts. (S'ils avaient chacun une couleur différente, cela ne changerait pas les résultats...)

2. **Au moins un 6 :** contraire de pas de 6. Il y a $6^6 - 5^6 = 31\,031$ telles possibilités.

Au moins deux 6 : c'est le contraire de "0 ou exactement un 6".
jamais de 6 : 5^{12} possibilités. Exactement un 6 : 12×5^{11} possibilités. D'où au final $6^{12} - 5^{12} - 12 \times 5^{11} = 1\,346\,704\,211$ possibilités.

La réponse est sans appel !

Exercice 20

Voyons tout d'abord comment obtenir ces sommes :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Effectuons une légère analyse :

• Si les dés sont tous distincts :

Somme égale à

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\times$	$\times$	$\times$	$(4,1,3,2)$	$(5,1,4,2)$	$(6,1,5,2)$ $(6,1,4,3)$ $(5,2,4,3)$	$(6,2,5,3)$	$(6,3,4,5)$	$\times$	$\times$	$\times$

Avec les permutations, on a $7 \times 4!$ possibilités.
• Si exactement 2 dés sont égaux :

Somme égale à

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\times$	$\times$	$(3,1,2,2)$	$\times$	$(5,1,4,2)$	$\times$	$(4,4,6,2)$ $(4,4,5,3)$	$\times$	$(6,4,5,5)$	$\times$	$\times$

Avec les permutations, on a $5 \times \frac{4!}{2!}$ possibilités.

• Si exactement 3 dés sont égaux :
alors le quatrième doit être égaux aux trois autres. C'est impossible.

• Si exactement 4 dés sont égaux :
Somme égale à

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$(1,1,1,1)$	$\times$	$(2,2,2,2)$	$\times$	$(3,3,3,3)$	$\times$	$(4,4,4,4)$	$\times$	$(5,5,5,5)$	$\times$	$(6,6,6,6)$

On a 6 possibilités.

En conclusion, on a $\boxed{7 \times 4! + 5 \times \frac{4!}{2!} + 6 = 234}$ possibilités.

Exercice 21

1. Méthode 1 : Il s'agit simplement de choisir l'emplacement des A dans le mot, d'où $\boxed{\binom{n}{a}}$ possibilités.

   Méthode 2 : On cherche toutes les permutations possibles du mot $\underbrace{A\ldots A}_{a \text{ fois}}\underbrace{B\ldots B}_{b \text{ fois}}$.

2. Avec la méthode 2, si on note $A_1, \ldots, A_k$ les lettres et $r_1, \ldots, r_k$ leur nombre d'occurence, il est facile de voir qu'il s'agit de toutes les permutations du mot $\underbrace{A_1 \ldots A_1}_{r_1 \text{ fois}} \ldots \underbrace{A_k \ldots A_k}_{r_k \text{ fois}}$, c'est à dire

$$\boxed{\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}}$$

   où $n = r_1 + \ldots + r_k$ est le nombre total de lettres.

3. **Explications sur l'exemple $(x_1 + x_2)^n$:**

   Développer l'expression $(x_1+x_2)^n = \underbrace{(x_1+x_2)\ldots(x_1+x_2)}_{n \text{ fois}}$ revient à trouver toutes les combinaisons possibles de $x_i x_j$ résultant du produit des n membres. Cela se présente donc sous la forme

$$(x_1+x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x_1^k x_2^{n-k}$$

   où a_k est le nombre de fois où l'on retrouve l'expression $x_1^k x_2^{n-k}$ dans le développement. On peut interpréter a_k comme le nombre de mots possibles écrits avec les lettres A_1 et A_2. En effet, à un mot à n lettre en A_1, A_2 possible correspond exactement un choix de x_1, x_2 dans les parenthèses :
   Par exemple, le mot $A_1A_1A_2\ldots A_1$ correspond au choix de x_1 dans la première parenthèse, A_1 dans la deuxième parenthèse, A_2 dans la troisième parenthèse, etc ...

   En conclusion, $\boxed{a_k = \dfrac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}}$ et la formule est démontrée.

Exercice 22

1. Il y a $\boxed{10^8}$ tels nombres.

2. On peut écrire

$$n = a + 10b + 100c,$$

   $a, b, c \in \mathbb{N}$, avec $0 \leqslant a, b \leqslant 9$.
   Donc :

$$n^3 = a^3 + 30a^2b + 100K$$

   (où $K = 10b^3+10000c^3+3ab^2+3a^2c+300ac^2+300b^2c+3000bc^2+60abc \in \mathbb{N}$.)
   Par conséquent, n^3 se termine par 11 si et seulement si $a^3 + 30a^2b$ se termine par 11.

- Si $a^3 + 30a^2b$ se termine par 11, alors a^3 se termine par 1, et donc, forcément, on a : $\boxed{a = 1}$ (examiner tous les cubes des nombres de 0 à 9).

- $1 + 30b$ se termine par 11 si et seulement si $3b$ se termine par 1, ce qui se produit si et seulement si $\boxed{b = 7}$ (examiner tous les triples des nombres de 0 à 9).

   Ainsi, n^3 se termine par 11 si et seulement si $a = 1$ et $b = 7$. Or, $1 \leqslant n \leqslant 10^{10} - 1$, signifie que n s'écrit avec 10 chiffres non tous nuls, commençant éventuellement par un ou plusieurs zéros.
   Il y a donc $\boxed{10^8}$ tels nombres.

Exercice 23

1. On calcule ceci grâce à la formule du crible.
   On note A_i l'ensemble des permutations pour lesquelles l'objet i est à la place i. Le nombre cherché est donc le cardinal de l'ensemble $\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n}$.
   Or, d'après la formule du crible (principe d'inclusion - exclusion), on a

$$\begin{aligned}
\text{card}\quad (A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \textstyle\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \quad \underbrace{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}}_{\substack{k \text{ éléments en place.} \\ \text{Il faut placer les autres.}}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \textstyle\sum_{i_1 < \ldots < i_k} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}
\end{aligned}$$

   Il faut passer au complémentaire. Le nombre de permutations totale étant $n!$, Conclusion, le nombre de dérangements sans coïncidence est $n!\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k!}\right)$, ou noté autrement, on obtient en fait $\boxed{n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}}$

2. a) $D_{n,n} = 1$: parce que tous les éléments sont à "leur" place. Il n'y a qu'une seule telle possibilité.
$D_{n,n-1} = 0$: parce que si $n-1$ éléments sont à "leur" place, le dernier élément n'a comme seule possibilité que la place restante, qui est celle de son numéro. Il n'y a donc pas de dérangement possible.

b) $\binom{n}{k}$ représente le choix des éléments à mettre à "leur" place et les autres sont à déranger sans coïncidence.

c) Notons $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de n élements. Il s'agit de faire une partition de $\mathfrak{S}_n$ grâce au nombre d'éléments fixes.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\text{card } (\mathfrak{S}_n) &= \sum_{k=0}^{n} \text{card } \{\text{permutations ayant exactement } k \text{ éléments fixes.}\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}\end{aligned}$$

Or, on sait que card $\mathfrak{S}_n$ est $n!$.

3. a) On calcule le nombre de dérangements sans coïncidence de 5 objets :

$$\begin{aligned}D_5 &= 5!\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) \\ &= 60 - 20 + 5 - 1 = 44\end{aligned}$$

La probabilité est donc de $\dfrac{44}{5!} = \dfrac{44}{120} = \boxed{\dfrac{11}{30}}$

b) C'est $5! - D_{5,0} - D_{5,1}$. Or, on vient de calculer $D_{5,0}$ et, d'après la formule de la question précédente, on a $D_{5,1} = \binom{5}{1} D_4$. Il faut donc calculer D_4.

$$\begin{aligned}D_4 &= 4!\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \\ &= 12 - 4 + 1 = 9\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre de cas possibles est $5! - D_{5,0} - D_{5,1} = 120 - 44 - 5 \times 9 =$

et la probabilité est $\boxed{\dfrac{31}{120} \simeq 0,26}$