Feuille 13 – Produit scalaire

Exercice 1: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Calculer* – *Chercher* –

Soient A et B les points de l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives $(2,-2,1)$ et $(1,2,2)$ dans un repère orthonormé centré en O.

1. **a)** Déterminer les longueurs OA et OB.
b) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle en O.
c) En déduire la longueur du segment $[AB]$.

2. **a)** On Introduit C_α le barycentre de $(A,\alpha),(B,1-\alpha)$ pour $\alpha\in[0,1]$. Calculer la longueur OC_α.
b) Comment vérifier en partie votre résultat ?
c) En déduire par exemple la longueur OI si I est le milieu de $[AB]$.

3. **a)** Soit D un point de la droite (AB). Déduire de toutes ces questions la ou les solutions de l'équation $<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}>=k$.
b) Proposer une autre méthode pour arriver à ce résultat.

Exercice 2: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Cours* –

Soit la base $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^3$ exprimée dans la base canonique.

1. Déterminer la matrice de Gram G de la base $\mathcal{B}$.

2. Déterminer $<u,v>$ où $M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 3: [Indications] [Correction] Trouver une base orthonormée de $\ker u$ où $u:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto x+y+z$.

Exercice 4: [Indications] [Correction] – *Cours* – ☆

Soient $x,y,z\in\mathbb{R}$ tels que $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$. Montrer que $(x+2y+3z)^2\leqslant 14$.

Exercice 5: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Calculer* –

1. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ (noté dans l'ordre (v_1,v_2,v_3)) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $M=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ (dans la base canonique). Déterminer les coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$.

3. En déduire les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale de M sur
a) $F=Vect(v_1,v_2)$
b) $G=Vect(v_3)$

4. Déterminer la distance
a) de M à F
b) de M à G.

5. Pour $A=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, déterminer
a) la projection orthogonale de A sur F.
b) la projection orthogonale de A sur G.

6. Pour $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, déterminer
a) $d(B,F)$
b) $d(A,G)$

Exercice 6: [Indications] [Correction] – *Cours* –

Soit $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\right)$ une base de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer la matrice de Gram de $\mathcal{B}$.

2. Montrer que les vecteurs $u=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\-3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $v=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sont orthogonaux.

3. Supposons que l'on dispose d'une base othonormée $\mathcal{B}_2=\left(\frac{u}{||u||},\frac{v}{||v||},w_3,w_4\right)$. On pose $F=Vect(u,v)$.
a) Déterminer l'image de $N=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ par la projection orthogonale sur F.
b) Déterminer l'image de $M=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ par la projection orthogonale sur F.

Exercice 7: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Mobiliser* – *Raisonner* – ☆

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sans faire de calculs.
2. a) Vérifier que 3 est valeur propre de M et que la dimension de son espace propre E_3 est 2 sans déterminer E_3.
   b) Déterminer à vue un premier vecteur propre de valeur propre 3.
   c) En déduire une base orthogonale de E_3.
3. En déduire un troisième vecteur propre puis ensuite sa valeur propre associée. ☆

Exercice 8: [Indications] [Correction] – *Calculer* – ☆☆

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ caractérisé par le système d'équation

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthogonale $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_s)$ de F.
2. Déterminer l'image d'un point $M \in \mathbb{R}^4$ par la projection orthogonale p sur F en fonction de $v_1, \ldots, v_s$.
3. En déduire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p sur F.
4. Calculer $d(e_1, F)$ où $e_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Aller plus loin

Exercice 9: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – *(ENS)* ☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tA$ la transposée de A vérifiant $A\,{}^tA\,A = I_n$.

1. a) Montrer A est symétrique ☆☆
   b) En déduire que $A^3 = I_n$.
2. Justifier que A est diagonalisable.
3. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre. ☆
4. En déduire que A est la matrice identité.

Exercice 10: [Indications] [Correction] – *Mobiliser* – *Raisonner* – ☆

Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 3$. Soit (u, v) une famille libre de E et f l'application définie sur E par

$$f(x) = < u, x > v + < v, x > u.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E
2. a) Vérifier que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2$
   b) En déduire une première valeur propre λ_0 de f et un minorant de la dimension de l'espace propre associé.
3. Notons $(u, v, w_3, \ldots, w_n)$ une base de E avec $u, v \perp Vect(v_3, \ldots, v_n)$. (On admet que ceci est possible.
   a) Quelle serait la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$?
   b) En déduire l'existence de deux autres valeurs propres de f.

Exercice 11: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – *(ENS)* ☆☆

Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si u et v sont unitaires (i.e. de norme 1), on a

$$< u+v, u-v > = 0$$

2. Soit f un endomorphisme de E tel que

$$< x, y > = 0 \quad \Rightarrow \quad < f(x), f(y) > = 0$$

   Montrer que $||f(u)|| = ||f(v)||$ pour tout vecteur u, v tels que $||u|| = ||v||$.
3. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in E,\ ||f(x)|| = k||x||$.

Exercice 12: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – ☆

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad ||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, v_i >^2$$

Montrer que $(v_1, \ldots, v_r)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Problème : [Indications] [Correction] Problème 2 du sujet de calcul et raisonnement (2024)

Pour tout entier r non nul, on considère sur $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire usuel. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$, alors leur produit scalaire $\langle X, Y \rangle$ est égal à $\sum_{k=1}^{r} x_k y_k$.

Comme le produit matriciel $X^\mathsf{T} Y$ est égal à la matrice $\left(\sum_{k=1}^{r} x_k y_k\right) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, on identifiera $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en notant $\langle X, Y \rangle = X^\mathsf{T} Y$.

De même, la norme euclidienne de X sera définie par $\|X\| = \sqrt{X^\mathsf{T} X}$.

Pour toute matrice M, on notera $\ker(M)$ son noyau et $\mathrm{Im}(M)$ son image.

On se donne trois entiers naturels non nuls n, p et q.

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Justifier que $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que si M est inversible, alors M^T aussi et que l'on a :

$$((M^\mathsf{T})^{-1} = (M^{-1})^\mathsf{T}.)$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Prouver que le noyau de A est égal au noyau de $A^\mathsf{T}A$.
Indication : on pourra étudier la quantité $X^\mathsf{T}A^\mathsf{T}AX$ lorsque $X \in ker(A^\mathsf{T}A)$.

À partir d'ici, le chapitre sur la réduction sera nécessaire.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Justifier que $A^\mathsf{T}A$ est diagonalisable.

5. Dans cette question on considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telles que $A^\mathsf{T}A = PDP^{-1}$.
On fera en sorte que la première ligne de P ne soit constituée que de 1.

On considère pour toute la suite une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On suppose que les colonnes de A que l'on notera $C_1, C_2, \ldots, C_p$ forment une famille libre.

6. Donner la définition de la liberté de la famille $(C_1, \ldots, C_p)$ et en déduire que le noyau de A est réduit au vecteur nul, puis que la matrice $A^\mathsf{T}A$ est inversible.

7. On considère la matrice $H = A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}$.

a) Prouver que $H^2 = H$ et $H^\mathsf{T} = H$.
b) Prouver que $\ker(H) = (\mathrm{Im}(H))^\perp$.
c) Prouver que $\ker(H) = \ker(A^\mathsf{T})$ puis que $\mathrm{Im}(H) = \mathrm{Im}(A)$.

On admet que cela prouve que l'application $p : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \mapsto HX$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$.
Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $g : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \|B - AX\|^2$.

8. Montrer que la fonction g admet un minimum global atteint en un unique point : $\left(\hat{X} = (A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}B.\right)$

9. Simplifier $\hat{X}$ lorsque $n = p$. Le résultat est-il cohérent ?

10. Que vaut $\hat{X}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Indications

Exercice 4 [Correction]
Traduire ceci à l'aide de normes.

Exercice 7 [Correction]
1. Observer l'allure particulière de la matrice.

Exercice 10 [Correction]
2. **a)** S'intéresser à $\mathrm{Im}\, f$ comme $Vect(\ldots)$ grâce à a définition de f.

Exercice 11 [Correction]
2. Commencer par montrer l'égalité avec u et v unitaires + qst 1.
Deuxième étape, $u = ||u||e_1$ et $v = ||v||e_2 + e_1, e_2$ unitaires.

Exercice 1

1. a) On a

$$\boxed{OA = \sqrt{9} = 3 \quad ; \quad OB = \sqrt{9} = 3}$$

b) Le triangle est rectangle en O si et seulement si $u = \overrightarrow{OA} \perp v = \overrightarrow{OB}$. Or $< u, v >= 0$. Le triangle est donc rectangle en O.

c) Par la relation de Chasles puis le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} AB^2 &= ||\overrightarrow{AB}||^2 \\ &= ||\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}||^2 \\ &= ||AO||^2 + ||OB||^2 \\ &= 2 \times 9 = 18 \end{aligned}$$

D'où

$$AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Rem : On pourrait bien entendu chercher cette longueur à l'aide de la norme de $\overrightarrow{AB}$.

2. a) Pour des raisons pratiques de rédaction, on note ici C au lieu de C_α. D'après les propriétés des barycentres, on sait que

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}.$$

On note $w_1 = \alpha\overrightarrow{OA}$ et $w_2 = (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{OC}||^2 &= ||w_1||^2 + ||w_2||^2 + 2\underbrace{< w_1, w_2 >}_{=0} \\ &= \alpha^2||u||^2 + (1-\alpha)^2||v||^2 \\ &= 9\left(\alpha^2 + (1-\alpha)^2\right) \\ &= 9\left(\alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 1\right) \\ &= 9\left(2\alpha^2 - 2\alpha + 1\right) \end{aligned}$$

i.e.

$$\boxed{OC = 3\sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}}$$

b) On peut prendre $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ pour retomber sur A et B.

c) Il suffit de prendre $\alpha = \frac{1}{2}$. On obtient :

$$\boxed{OI = \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

3. a) Si D est un point de la droite (AB), alors c'est un barycentre du type précédent. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D = C_\alpha$, c'est-à-dire que

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}.$$

Ainsi,

$$< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} >=< \overrightarrow{OA}, \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} >= \alpha < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} > +(1-\alpha)\underbrace{< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} >}_{=0}$$

et donc

$$< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} >= \alpha||OA||^2 = 9\alpha$$

Ainsi,

$$< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} >= k \quad \Leftrightarrow \quad k = 9\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{k}{9}$$

ce qui donne comme solution du système les points D tels que

$$\boxed{D = bar\big((A, \frac{k}{9}), (B, 1 - \frac{k}{9})\big).}$$

En réinjectant dans la forme de D donnée au départ, les solutions sont :

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} = \frac{k}{9}\overrightarrow{OA} + (1 - \frac{k}{9})\overrightarrow{OB}.$$

ou encore

$$\boxed{D = \left(1 + \frac{k}{9}, 2 - 4\frac{k}{9}, 2 - \frac{k}{9}\right)}$$

b) En posant $D=(x,y,z)$, on aurait pu établir un système d'équations pour trouver x,y,z.

Première équation : Sachant que $D=(x,y,z)$, on a

$$< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} >= k \quad \Leftrightarrow \quad 2x-2y-z=k.$$

Autre équations :
Le point D appartient à la droite (AB), on cherche un système de deux équation décrivant la droite (AB) :

$$D\in(AB) \quad \Leftrightarrow \quad \exists t\in\mathbb{R} \mid D = A + t\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{aligned}
D = A+t\overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1-2\\2+2\\2-1\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-t\\-2+4t\\1+t\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = & 2-t\\ y = & -2+4t\\ z = & 1+t\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = & 2-t\\ y = & -2+4t\\ t = & z-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = & 2-(z-1)\\ y = & -2+4(z-1)\\ t = & z-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = & 3-z\\ y = & -6+4z\\ t = & z-1\end{cases}
\end{aligned}$$

Ayant z, on peut retrouver t, ainsi,

$$D\in(AB) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = & 3-z\\ y = & -6+4z\end{cases}$$

Un système d'équations pour la droite (AB) est donc

$$(AB)\ :\ \begin{cases} x+z-3=0\\ y-4z+6=0\end{cases}$$

Voici donc un système de 3 équations permettant d'obtenir D :

$$\begin{cases} 2x-2y-z=k\\ x+z-3=0\\ y-4z+6=0\end{cases}$$

qui une fois résolu donne

$$x = 1+\frac{k}{9},\quad y = 2-\frac{4k}{9},\quad z = 2-\frac{k}{9}$$

Exercice 2

1. On pose P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$.

$$P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$$

alors on sait d'après le cours que

$$G = {}^t\!P\cdot P = \begin{pmatrix}6&3&1\\3&6&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

2. On trouve

$$< u,v >= \begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix} G \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 4$$

ou alors on dit que $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3)$, puis

$$< u,v >=< v_1, v_2+v_3 >=< v_1,v_2 > + < v_1,v_3 >$$

et on lit dans la matrice de Gram que

$$< v_1,v_2 >= 3,\quad < v_1,v_3 >= 1$$

et donc

$$\boxed{< u,v >= 4}$$

Exercice 3

On commence par exemple par chercher une base :

$$\ker u = \text{Vect}\left(()\,\underbrace{(1,0,-1)}_{a}, \underbrace{(1,-1,0)}_{b}\right)$$

Ensuite, il nous faut trouver une base orthogonale de $\ker u$ à partir de cette base. Comme $\dim \ker u = 2$ et que toute famille orthogonale est libre, On sait que, pour $b' = (x, y, z)$, (a, b') est une base de $\ker u$ ssi $\mathcal{S}$ est vérifié, avec

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (a, b') \text{ orthogonale} \\ b' \in \ker u \end{cases}$$

Or,

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} < a, b' >= 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow b' \in \text{Vect}\left(()\,(1,-2,1)\right)$$

Une base orthonormée de $\ker u$ est donc

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)}$$

Exercice 4

On note $u = (x, y, z)$ et $v = (1, 2, 3)$. Alors

$$\begin{aligned} (x + 2y + 3z)^2 &= < u, v >^2 & (1) \\ &\leqslant ||u||^2||v||^2 = \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{\leqslant 1} 14 & (2) \\ &\leqslant 14 & (3) \end{aligned}$$

Exercice 5

1. Soit on calcule 2 par 2 les produits scalaires, soit on calcule sa matrice de Gram en gardant à l'esprit qu'elle est symétrique

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Elle est orthogonale, c'est donc une famille libre et donc une base car de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$.

2. En posant $(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{B}$ on a

$$M = \frac{< M, v_1 >}{||v_1||^2} v_1 + \frac{< M, v_2 >}{||v_2||^2} v_2 + \frac{< M, v_3 >}{||v_3||^2 v_3}$$

Or, les points M, v_1, v_2, v_3 étant explicités dans la base canonique, on a

$$\begin{cases} < M, v_1 >= {}^tMv_1 = -1 \\ < M, v_2 >= {}^tMv_2 = -8 \\ < M, v_3 >= {}^tMv_3 = 2 \end{cases}$$

D'où

$$M = -\frac{1}{5}v_1 - \frac{8}{30}v_2 + \frac{2}{6}v_3$$

et en version simplifiée :

$$\boxed{M = -\frac{1}{5}v_1 - \frac{4}{15}v_2 + \frac{1}{3}v_3}$$

3. a) Grâce à la formule de projection du cours, on sait que

$$p_F(M) = -\frac{1}{5}v_1 - \frac{4}{15}v_2$$

b) On a

$$p_G(M) = \frac{1}{3}v_3$$

4. a) On a

$$\boxed{d(M, F) = ||M - p_F(M)|| = ||\frac{1}{3}v_3|| = \frac{1}{3}\sqrt{6}}$$

b) On a

$$\begin{aligned} d(M, G)^2 &= ||M - p_G(M)||^2 = || - \frac{1}{5}v_1 - \frac{4}{15}v_2||^2 \\ &= \frac{1}{25}||v_1||^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 ||v_2||^2 \\ &= \frac{1}{25} \times 5 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 \times 30 \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{d(M, G) = \sqrt{\frac{7}{3}}}$$

5. a) Comme $F = Vect(v_1, v_2)$ et que v_1, v_2 sont orthogonaux, on a

$$p_F(A) = \frac{< A, v_1 >}{||v_1||^2} v_1 + \frac{< A, v_1 >}{||v_1||^2} v_2$$

Or,

$$< A, v_1 >= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$< A, v_2 >= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = -7$$

$$p_F(A) = -\frac{4}{5} v_1 - \frac{7}{30} v_2$$

b) Comme $G = Vect(v_3)$ on a

$$p_G(A) = \frac{< A, v_3 >}{||v_3||^2} v_3$$

Or,

$$< A, v_3 >= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$p_G(A) = \frac{1}{6} v_3$$

6. a) Comme $F = Vect(v_1, v_2)$ et que (v_1, v_2, v_3) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, on a

$$d(B, F)^2 = \frac{< A, v_3 >^2}{||v_3||^2}$$

Or,

$$< B, v_3 >= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

D'où

$$d(B, F)^2 = \frac{4^2}{6} = \frac{8}{3}$$

et donc

$$d(B, F) = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

b) Comme $G = Vect(v_3)$ et que (v_1, v_2, v_3) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, on a

$$d(B, F)^2 = \frac{< A, v_1 >^2}{||v_1||^2} + \frac{< A, v_2 >^2}{||v_2||^2}$$

Or,

$$< B, v_1 >= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$< B, v_1 >= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 2$$

D'où

$$d(B, G)^2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{30} = \frac{1}{3}$$

et donc

$$d(B, G) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 6

1. $G = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 6 & 1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 10 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $< u, v >= {}^tU_{\mathcal{B}} G V_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

3. a) Elle est triviale, c'est $p(N) = (\alpha, \beta, 0, 0)_{\mathcal{B}_2} = \alpha u + \beta v$

b) Pour tout point $M \in \mathbb{R}^4$, la formule est

$$p(M) = \frac{< M, u >}{||u||^2} u + \frac{< M, v >}{||v||^2} v$$

Or

$$||u||^2 = {}^t u G u = 10 \quad ; \quad ||v||^2 = 10$$

$$\boxed{p(M) = \frac{-a + 2c + 3d}{10} u + \frac{-a + 6b - 5c - 3d}{10} v}$$

Exercice 7

1. La matrice est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.

2. a) On oberve que

$$M - 3Id = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs colonnes étant tous colinéaires, on a

$$\dim E_3 = \dim(\ker M - 3Id) = 2$$

b) N'importe que élément non nul de $\ker(M - 3Id)$ est un vecteur propre. Or on observe que sur la matrice $M - 3Id$, $C_1 = C_2$, d'où $C_1 - C_2 = 0$. Autrement dit,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_3$$

c) • Méthode 1 : *coup de chance !*

On observe que sur $M - 3Id$, $C_1 + C_2 + C_3 = 0$. Autrement dit,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3$$

Et par bonheur,

$$< v_1, v_2 >= 0$$

On a donc une base orthogonale de E_3 sous la forme $\{v_1, v_2\}$.

C'est une méthode "coup de chance car rien ne garantit a priori l'orthogonalité. D'ailleurs, on aurait également pu voir que

$$C_2 = -2C_1$$

et dire que $(1, -2, 0) \in E_3$ et là, par d'orthogonalité avec v_1.

• Méthode 2 : *où on est certain de trouver un vecteur orthogonal*

On cherche un vecteur $v_2 = (x, y, z)$ tel que

$$v_2 \in E_3 \qquad \text{et} \qquad v_2 \perp v_1$$

i.e.

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 0 & (v_2 \in E_3) \\ x - y = 0 & (v_2 \perp v_1) \end{cases}$$

la résolution rapide donne $v_2 \in Vect((1, 1, 1))$. On peut donc prendre

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3$$

On a donc une base orthogonale de E_3 sous la forme $\{v_1, v_2\}$.

3. On sait que si la matrice est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit, le troisième vecteur propre sera orthogonal aux deux autres. On pose $v_3 = (x, y, z)$ et cherche donc à résoudre le système issu de

$$v_2 \perp v_1 \quad ; \quad v_3 \perp v_2.$$

On trouve par exemple

$$\boxed{v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

En réinjectant dans la matrice M avec Mv_3, on trouve

$$Mv_3 = -3v_3$$

Ainsi,

$$\boxed{Sp(M) = \{-3, 3\}}$$

Exercice 8

1. Commençons par déterminer une base "classique" de F. On trouve par exemple :

$$F = Vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$$

Pour trouver une base orthogonale, il nous faut deux vecteurs orthogonaux, or ceux-ci ne le sont pas. On cherche donc par exemple un troisième vecteur v_2 dans F tel que $< v_1, v_2 >= 0$. En notant $v_2 = (x, y, z, t)$, on cherche donc à résoudre

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ < v_1, v_2 >= 0 \end{cases} = \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x - 2y + z = 0 = 0 \end{cases}$$

On trouve comme solution par exemple le vecteur $v_2 = (-2, 1, 4, -3)$. Ainsi, une base orthogonale de F est

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

2. On sait que comme (v_1, v_2) est une base orthogonale de F, alors, pour tout point $M \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p(M) = \frac{< M, v_1 >}{||v_1||^2} + \frac{< M, v_2 >}{||v_2||^2}$$

D'où

$$p(M) = \frac{< M, v_1 >}{6} + \frac{< M, v_2 >}{30}$$

ou en version simplifiée

$$\boxed{p(M) = \frac{1}{30}\left(5 < M, v_1 > + < M, v_2 >\right)}$$

3. Pour obtenir la matrice, il suffit de déterminer les $p(e_i)$ avec $(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Or, $< e_i, v >$ correspond au $i^{\text{ème}}$ coefficient de v. Ainsi,

$$\begin{cases} < e_1, v_1 >= 1 \\ < e_2, v_1 >= -2 \\ \ldots \end{cases}$$

Avec ces données, et après un certain quelques calculs, on trouve

$$M(p) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. On sait que

$$d(e_1, F) = ||e_1 - p(e_1)||$$

Ainsi

$$\begin{aligned} d(e_1, F) &= ||e_1 - p(e_1)|| \\ &= \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{10}\left\|\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| \\ &= \frac{1}{10}\left\|\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = \frac{70}{10} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{d(e_1, F) = \sqrt{\frac{7}{10}}}$$

Exercice 9

1. a) A est symétrique :

$$A = A\,{}^t Id = A\,{}^t\!A\,A\,{}^t\!A = {}^t\!A$$

b) Comme A est symétrique, on a ${}^t\!A = A$ et donc $A\,{}^t\!A\,A = A^3$. Ceci engendre que

$$A^3 = I_n$$

2. A est symétrique réelle donc A est diagonalisable d'après le théorème spectral.

3. Si λ est valeur propre, en notant v un vecteur propre (non nul) de vap λ, on a

$$v = I_n v = A^3 v = A^2(\lambda v) = \ldots \lambda^3 v$$

d'où

$$v = \lambda^3 v$$

et comme v est non nul, $\lambda^3 = 1$. Il n'y a donc qu'une seule valeur propre au maximum : la seule possibilité étant

$$\lambda = 1.$$

Comme A est diagonalisable, elle admet au moins une valeur propre. Au final, elle a donc exactement une valeur propre qui est

$$\lambda = 1.$$

4. La matrice A est diagonalisable avec comme seule valeur propre 1. Il existe donc une matrice inversible P telle que

$$A = PDP^{-1}$$

avec D la matrice diagonale ne comportant que des 1 sur la diagonale. Or, cette matrice est

$$D = I_n$$

D'où

$$A = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$$

D'où

$$A = I_n$$

Exercice 10

2. a) Clairement, $Im(f) \subset (u, v)$ d'où $\text{rg}(f) \leqslant 2$.

b) On a $\text{rg}(f) \leq 2 < n$, donc 0 est vap, avec $\dim E_0 \geqslant n - 2$

3. a) En complétant la base (u, v) en une base $(u, v, w_3, \ldots, w_n)$ avec $(w_1, \ldots, w_n)$ une base de $Vect(u, v)^\perp$, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} < v, u > & ||v||^2 & 0 & \ldots \\ ||u||^2 & < u, v > & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \end{pmatrix}$$

b) La recherche de vap donne

$$\boxed{Sp(f) = \{0,\ < u, v > \pm ||u||.||v||\}}$$

Exercice 11

1. $< u + v, u - v >= ||u||^2 - ||v||^2 = 1 - 1 = 0$

2. • Soient u, v unitaires. Alors, d'après la question 1,

$$< u + v, u - v >= 0$$

En appliquant f, par la propriété de l'énoncé, on a

$$< f(u + v), f(u - v) >=< u + v, u - v >= 0$$

Or,

$$< f(u + v), f(u - v) >= ||f(u)||^2 - ||f(v)||^2$$

D'où

$$0 = |f(u)||^2 - ||f(v)||^2$$

et donc

$$||f(u)|| = f(v)||$$

• Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Alors $\tilde{u} = \frac{u}{||u||}$ et $\tilde{v} = \frac{v}{||v||}$ sont unitaires. En appliquant le résultat sur $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$, on obtient

$$||f(\tilde{u})|| = ||f(\tilde{v})||$$

ce qui donne, comme f est linéaire,

$$\frac{||f(u)||}{||u||} = \frac{||f(v)||}{||v||}$$

et comme $||u|| = ||v||$, on en déduit

$$||f(u)|| = ||f(v)||$$

3. $u \mapsto ||f(u)||$ est constante d'après la question précédente si u est un vecteur unitaire. On pose alors

$$k = ||f(u)|| \quad \text{pour } u \text{ un vecteur unitaire quelconque.}$$

(k ne dépendant donc pas de u.) Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$\left\| f\left(\underbrace{\frac{x}{||x||}}_{\text{de norme 1}} \right) \right\| = k$$

Exercice 12

- Montrons que la famille est orthogonale :

On prend $x = v_1$ dans l'égalité. On obtient

$$||v_1||^2 = \sum_{k=1}^{n} < v_1, v_i >^2 = ||v_1||^1 + \sum_{k=2}^{n} < v_1, v_i >^2$$

Par simplification, on trouve

$$\sum_{k=2}^{n} \underbrace{< v_1, v_i >^2}_{\geqslant 0} = 0$$

Or, une somme de nombre positifs ne peut être égale à 0 que si chaque terme est nul. Donc

$$< v_1, v_i >= 0 \qquad \forall i = 2, \ldots, n$$

pour $x = v_2, \ldots, v_n$. La famille est donc orthogonale.

- Montrons que c'est une base :

La famille est orthogonale, donc libre. Elle est de cardinal n, c'est une base.

Problème

1. $(B^\mathsf{T}, A^\mathsf{T}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donc les matrices $(AB)^\mathsf{T}$ et $B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$ sont toutes les deux de taille (q, n). De plus, pour tous $i \in [\![1; q]\!]$ et $j \in [\![1; n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} [B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} [B^\mathsf{T}]_{i,k} [A^\mathsf{T}]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} A_{j,k} B_{k,i} \\ &= [AB]_{j,i} \\ &= [(AB)^\mathsf{T}]_{i,j} \end{aligned}$$

donc $\boxed{B^\mathsf{T} A^\mathsf{T} = (AB)^\mathsf{T}.}$

2. M est inversible si la matrice M^{-1} vérifie $MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$.
Or, en appliquant la transposée et la question précédente, il vient

$$(M^{-1})^\mathsf{T} M^\mathsf{T} = M^\mathsf{T} (M^{-1})^\mathsf{T} = I_n^\mathsf{T} = I_n.$$

Donc $\boxed{M^\mathsf{T} \text{ est inversible, d'inverse } (M^{-1})^\mathsf{T}.}$

3. On va prouver le résultat par double inclusion.

- Montrons que $\ker(A) \subset \ker(A^\mathsf{T})$:

Soit $X \in \ker(A)$, c'est-à -dire $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $AX = 0$.
En multipliant à gauche par A^T, il vient $A^\mathsf{T} AX = 0$, donc $X \in \ker(A^\mathsf{T})$.
Donc $\ker(A) \subset \ker(A^\mathsf{T})$.

- Montrons que $\ker(A^\mathsf{T}) \subset \ker(A)$:

Soit $X \in \ker(A^\mathsf{T} A)$, c'est-à -dire $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $A^\mathsf{T} AX = 0$.
En multpliant à gauche par X^T, il vient $0 = X^\mathsf{T} A^\mathsf{T} AX = (AX)^\mathsf{T} AX$.
Mais AX étant une matrice colonne, $(AX)^\mathsf{T} AX = \|AX\|^2$.
Donc $\|AX\| = 0$, ce qui prouve $AX = 0$ donc $X \in \ker(A)$.
Donc $\ker(A^\mathsf{T} A) \subset \ker(A)$.

- Conclusion :

$$\boxed{\ker(A) = \ker(A^\mathsf{T} A).}$$

4. $(A^\mathsf{T} A)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} (A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} A$. Donc A est symétrique, et elle est réelle, donc par théorème spectral

$$\boxed{A^\mathsf{T} A \text{ est diagonalisable.}}$$

5. $A^\mathsf{T} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^\mathsf{T} A)$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A^\mathsf{T} A - \lambda I_3) < 3$.

$$\begin{aligned} A^\mathsf{T} A - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2-\lambda \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (2-\lambda)L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda \\ 0 & \lambda-3 & 3-4\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda \\ 0 & 0 & -3\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda = 3$ ou $\lambda^2 - 3\lambda = 0$, ce qui donne donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}.}$$

Les opérations sur les lignes conservent le noyau, donc

$$E_\lambda(A) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda \\ 0 & 0 & -3\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 3$, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A) \Leftrightarrow x+y+z = 0$$

donc $\boxed{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).}$

Et pour $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y+2z = 0 \\ y-z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = y = z$$

Donc $\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$

Par conséquent $A = PDP^{-1}$ pour les matrices suivantes :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

6. D'après le cours, on sait que comme la famille $(C_1, \dots, C_p)$ est libre, on a $\mathrm{rg}(A) = \text{nombre de colonnes} = p$. Or, par théorème du rang, on sait alors que

$$\dim\ker A = \text{nombre de colonnes} - \mathrm{rg}(A) = p - p = 0$$

D'où

$$\boxed{\ker A = \{\vec{0}\}}$$

Mais alors, d'après la question 17, $\ker(A^\mathsf{T}A) = \{0\}$.
Or $A^\mathsf{T}A$ est une matrice carrée, donc $\ker(A^\mathsf{T}A) = \{0\}$ implique que $\boxed{A^\mathsf{T}A \text{ est inversible.}}$

7. a) D'abord, $H^2 = A\underbrace{(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}A}_{I_p}(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T} = A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T} = H$, donc

$\boxed{H^2 = H.}$

$$\begin{aligned} \text{Ensuite, } H^\mathsf{T} &= \left[A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}\right]^\mathsf{T} \\ &= (A^\mathsf{T})^\mathsf{T}[(A^\mathsf{T}A)^{-1}]^\mathsf{T}A^\mathsf{T} \\ &= A[(A^\mathsf{T}A)^\mathsf{T}]^{-1}A^\mathsf{T} \\ &= A[A^\mathsf{T}(A^\mathsf{T})^\mathsf{T}]^{-1}A^\mathsf{T} \\ &= A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T} \\ &= H \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{H^\mathsf{T} = H.}$$

b) Soit $X \in \ker(H)$ et $Y \in \mathrm{Im}(H)$.
Alors par définition $HX = 0$ et il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = HU$.
Mais alors :

$$\begin{aligned} \langle Y, X\rangle &= Y^\mathsf{T}X \\ &= (HU)^\mathsf{T}X \\ &= U^\mathsf{T}HX \\ &= 0 \qquad \text{car } HX = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\forall (X,Y) \in \ker(H) \times \mathrm{Im}(H),\ X \perp Y$. Par conséquent $\ker(H) \subset (\mathrm{Im}(H))^\perp$.
Cependant, on sait par le cours que $\dim\left((\mathrm{Im}(H))^\perp\right) = n - \dim(\mathrm{Im}(H))$; et par théorème du rang on sait aussi $\dim(\ker(H)) = n - \dim(\mathrm{Im}(H))$.
Ainsi

$$\begin{cases} \ker(H) \subset (\mathrm{Im}(H))^\perp \\ \dim(\ker(H)) = \dim\left((\mathrm{Im}(H))^\perp\right) < +\infty \end{cases}$$

ce qui suffit pour conclure $\boxed{\ker(H) = (\mathrm{Im}(H))^\perp.}$

c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Prouvons l'équivalence

$$X \in \ker(H) \Leftrightarrow X \in \ker(A^\mathsf{T})$$

par double implication.

- <u>Supposons $X \in \ker(H)$.</u>

Alors $HX = 0$, c'est-à -dire $A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}X = 0$. En multipliant à gauche par A^T, il vient $\underbrace{A^\mathsf{T}A(A^\mathsf{T}A)^{-1}}_{I_p}A^\mathsf{T}X = 0$ donc $A^\mathsf{T}X = 0$, ce qui prouve $X \in \ker(A^\mathsf{T})$.

- <u>Réciproquement</u>

supposons $X \in \ker(A^\mathsf{T})$, c'est-à -dire $A^\mathsf{T}X = 0$. En multipliant à gauche par $A(A^\mathsf{T}A)^{-1}$, on trouve $HX = 0$, donc $X \in \ker(H)$.

- <u>Donc</u>

$$\boxed{\ker(H) = \ker(A^\mathsf{T}).}$$

Comme H et A^T ont n colonnes, il s'ensuit par théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(H) = n - \dim(\ker H) = n - \dim(\ker A^\mathsf{T}) = \mathrm{rg}(A^\mathsf{T}) = \mathrm{rg}(A).$$

Par conséquent, $\mathrm{Im}(H)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont de même dimension.
Prouvons $\mathrm{Im}(H) \subset \mathrm{Im}(A)$. Pour tout vecteur $Y \in \mathrm{Im}(H)$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = HX$, c'est-à -dire $Y = A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}X$. Mais alors $Y = AU$ pour le vecteur colonne $U = (A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}X$, donc $Y \in \mathrm{Im}(A)$. Cela prouve $\mathrm{Im}(H) \subset \mathrm{Im}(A)$, et l'égalité des dimensions permet alors de conclure

$$\boxed{\mathrm{Im}(H) = \mathrm{Im}(A).}$$

8. Soit $\hat{Y} = A\hat{X} = A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}B$. D'après l'énoncé, c'est le projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}(A)$. Donc c'est le point de $\mathrm{Im}(A)$ le plus proche de B. Plus précisément :

$$\forall Y \in \mathrm{Im}(A), \begin{cases} \|B - Y\| \geq \|B - \hat{Y}\| \\ \|B - Y\| = \|B - \hat{Y}\| \Leftrightarrow Y = \hat{Y}. \end{cases}$$

Comme $\hat{Y} = A\hat{X}$, le résultat prédédent se récrit ainsi :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} \|B - AX\| \geq \|B - A\hat{X}\| \\ \|B - AX\| = \|B - A\hat{X}\| \Leftrightarrow AX = A\hat{X} \end{cases}$$

et par conséquent

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} g(X) \geq g(\hat{X}) \\ g(X) = g(\hat{X}) \Leftrightarrow X - \hat{X} \in \ker(A). \end{cases}$$

Mais on a vu à la question 20 que $\ker(A) = \{0\}$. On trouve donc

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} g(X) \geq g(\hat{X}) \\ g(X) = g(\hat{X}) \Leftrightarrow X = \hat{X} \end{cases}}$$

ce qui est exactement la propriété demandée.

9. Quand $n = p$, alors A est carrée donc le résultat $\ker(A) = \{0\}$ montre que A est inversible, et par conséquent A^T aussi. Mais alors $(A^\mathsf{T}A)^{-1} = A^{-1}(A^\mathsf{T})^{-1}$, donc $\boxed{\hat{X} = A^{-1}B.}$
De fait, A étant inversible, AX peut prendre toutes les valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $g(X)$ est minimal quand AX est égal à B, c'est-à -dire quand $X = A^{-1}B$. Le résultat est cohérent.

10. On trouve $A^\mathsf{T}A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $(A^\mathsf{T}A)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\hat{X} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.}$