

Densité

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer -

Soit une variable aléatoire X de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in [0, 4], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante k .
2. Déterminer $P((X-2)(X-6) \leq 0)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de la variable X .
4. Retrouver $P((X-2)(X-6) \leq 0)$ grâce à la fonction de répartition de X .
5. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Y = (X-2)^2$.
6. Montrer que Y est à densité et déterminer celle-ci.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] (Loi de Pareto) - Cours - Calculer -

Soit $\alpha > 0$ et $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Soit X une V.A.R. admettant pour densité f , déterminer sa fonction de répartition F .
3. Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de X .

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] (Loi de Cauchy) - Cours - Calculer -

Soit X une V.A.R. admettant pour densité f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1. Calculer $P(X^2 - X < 0)$.
2. X admet-elle une espérance ? Une variance ?
3. Montrer que X^2 admet une densité et la déterminer.

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] - Calculer - Raisonner - Soient $a > 0$ et $\alpha > 0$ et

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, a[\\ \alpha x & \text{si } 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ \alpha(a-x) & \text{si } \frac{a}{2} \leq x < a \end{cases}$$

1. Calculer la constante α pour que f soit une densité de probabilité.

2. Soient X une variable aléatoire de densité f et un réel $b \in]0, \frac{a}{2}[$.
Calculer les probabilités $P\left(X > \frac{a}{2}\right)$ et $P\left(\frac{a}{2} - b < X \leq \frac{a}{2} + b\right)$.
3. Montrer que pour tout $b \in]0, \frac{a}{2}[$, les espaces $A = \left(X > \frac{a}{2}\right)$ et $B = \left(\frac{a}{2} - b < X \leq \frac{a}{2} + b\right)$ sont indépendants.

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer - Raisonner -

Soit X une V.A.R. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ admettant une densité f que l'on pourra supposer continue sauf éventuellement en 0. On note F sa fonction de répartition.

1. Exprimer, en fonction de F , les probabilités $P(\sqrt{X} \leq x)$ et $P(\ln(X) \leq x)$ où $x \in \mathbb{R}$.
2. Application : Supposons que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
a) Déterminer la fonction de répartition de $\sqrt{X}$ et $\ln X$.
b) En déduire que $\sqrt{X}$ et $\ln X$ admettent des densités et les déterminer.
3. Revenons au cas général de l'exercice. Montrer que $\sqrt{X}$ et $\ln X$ sont à densité et les déterminer, en les exprimant en fonction de f .

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] - Cours - Raisonner -

Soient X, Y deux v.a. indépendantes de densités respectives f et g . Montrer que les variables suivantes sont à densité. (On pourra supposer ici f, g continues).

1. $\max(X, Y)$
2. $\min(X, Y)$.
3. On choisit n fois de manière indépendante un nombre aléatoire X dans un intervalle $[0, 1]$. On pose Z le plus grand des nombres obtenus.
a) Déterminer la fonction de répartition de Z .
b) Au bout de combien de choix la probabilité d'obtenir un nombre Z plus grand que $\frac{1}{2}$ est-elle supérieure à 99% ?
c) Montrer que Z est une variable à densité.

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer -

Soit X une V.A.R. admettant pour densité f . (On pourra supposer f continue pour les calculs.)

1. Montrer que $|X|$ est V.A.R. admettant pour densité :

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) + f(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Montrer que X^2 est V.A.R. admettant pour densité :

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} (f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –

Soit X une V.A.R. suivant la loi $\mathcal{U}_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

1. Tracer les représentations graphiques de la densité et de la fonction de répartition X .
2. Déterminer $E[X]$ et $V[X]$.
3. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \tan(X)$ et en déduire si c'est une variable aléatoire à densité. (On déterminera la densité si c'est le cas.)

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Soit X une V.A.R. suivant la loi $\mathcal{U}_{]-1,1[}$.

1. Montrer que $Y = X^2$ est une variable à densité
2. Déterminer la densité de Y .
3. Déterminer l'espérance et la variance de Y .

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes chacune de loi uniforme sur $[0; 1]$. Déterminer la loi de

1. $X_1 + X_2$
2. $X_1 - X_2$
3. $X_1 + X_2 + X_3$

★
★★

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – Calculer – Modéliser –

Soit A une V.A.R. suivant la loi $\mathcal{N}(3, 2)$.

Quelle est la probabilité que l'équation $x^2 - Ax + 1 = 0$ admette :

1. une seule racine réelle ?
2. deux racines complexes non réelles ?
3. deux racines réelles distinctes ?

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – Cours – Soit X une V.A.R. suivant la loi $\mathcal{N}(2, 1)$, déterminer la loi de

1. $Y = -X$.
2. $Y = -2X$.
3. $Y = X + b$

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – Calculer –

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Montrer que $Z = e^{aX+b}$ admet une espérance et la calculer.
2. Montrer que Z admet en fait des moments de tout ordre.

3. En déduire l'espérance et la variance de Z .

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – Calculer – Mobiliser – Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et $Z = e^X$. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité, dont on déterminera une densité f^Z . (Cette loi s'appelle la loi log-normale.)**EXERCICE 15:** [Indications] [Correction] – Raisonner – Calculer – Modéliser –

La variable aléatoire X égale au poids d'une carotte du potager de Raimonde suit une loi normale. Sur une récolte de 400 carottes, 250 font moins de 20 grammes et 380 font plus de 12 grammes.

1. On suppose que ces proportions pratiques sont fidèles à la théorie. Évaluer $\mathbb{E}[X]$ et $\sigma(X)$.
2. Évaluer le pourcentage de carottes pesant plus de 18 grammes.
3. On arrache une carotte au hasard. Sachant qu'elle pèse plus de 15 grammes, calculer la probabilité pour qu'elle pèse moins de 18 grammes.

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – Raisonner – Calculer – ★

Soient b un nombre réel strictement positif et X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 , avec $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X)$.

Déterminer a pour que la probabilité de l'événement $(a < X \leq a+b)$ soit maximale.

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Modéliser –

Louise achète 9 sacs de blé à Robert d'une contenance étiquetée de 80kg chacun. (Elle s'attend donc à avoir 720kg de blé...) Robert d'étant pas toujours attentif, la masse du blé contenu dans un sac suit en réalité une loi normale $\mathcal{N}(80; 0.25)$. Les sacs sont mutuellement indépendants. Soit X la quantité de blé, en kilogrammes, que Robert lui a effectivement vendu.

1. Établir la loi de X .
2. Calculer la probabilité pour que Louise ait acheté en réalité moins de 720 kg de blé.
3. Dans le mois qui suit, les souris mangent en moyenne 50 kg de blé avec un écart-type de 20kg. En supposant que cette perte due aux rongeurs suit une loi normale, on note Y la quantité de blé qui lui restera au bout du mois, quand elle commencera à l'utiliser pour nourrir ses poules. Établir la loi de Y .
4. a) Déterminer a tel que $\Phi(a) = 0.05$ (où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.)
b) Chaque poule picore en moyenne 150 grammes de blé par jours, avec un écart-type de 50, en suivant une loi normale. Quelle est la loi de la quantité de blé mangée en un an par une poule ? (On suppose que le chat a mangé les souris et que les souris sont indépendantes.)
c) Combien Louise peut-elle nourrir de poules au maximum pendant un an (année non bissextile), avec une probabilité égale à 0.95 de ne pas manquer de grain ?

EXERCICE 18: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Modéliser –
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Calculer, pour $\lambda > 0$, la fonction de répartition de la variable aléatoire

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

et en déduire sa loi.

2. En déduire un algorithme permettant de simuler une variable aléatoire de loi exponentielle.

EXERCICE 19: [Indications] [Correction] – Mobiliser – Raisonner –
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ . Déterminer la loi de $X = \max(X_1, \dots, X_n)$.

EXERCICE 20: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –
Soit X une V.A.R. suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Calculer la valeur exacte de $P(\tan X > 0)$.
2. Calculer $E[e^{-X}]$.
3. En utilisant l'exercice précédent, simuler une valeur au hasard de $\tan X$.

EXERCICE 21: [Indications] [Correction] – Calculer –
Soit X une V.A.R. suivant la loi exponentielle de paramètre α .
Déterminer la loi de $Y = \ln X$.

EXERCICE 22: [Indications] [Correction] – Calculer – Cours –
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre θ .

1. Montrer que X^3 est à densité, et en déterminer une densité.
2. Montrer que $\min(X, Y^3)$ est à densité. (On ne demande pas de la calculer.)
3. Montrer que $X - Y$ est à densité et déterminer une densité de $X - Y$. ☆

EXERCICE 23: [Indications] [Correction] – Calculer – ☆
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ . Déterminer la loi de :

1. $\frac{X + Y}{2}$
2. $\frac{X - Y}{2}$.

EXERCICE 24: [Indications] [Correction] Loi exponentielle ; sans mémoire – Cours

Un sous-marin voyage en plongée, mais doit cependant refaire surface de temps en temps pour prendre l'air et renouveler l'atmosphère. On suppose que la durée d'une plongée en jours suit une loi exponentielle de paramètre λ . En dépouillant tous les livres de bord, on constate que 88,7% des plongées ont duré plus de 6 jours.

1. Donner une estimation du paramètre λ .
2. Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse une semaine.
3. a) Sachant que le sous-marin évolue immergé depuis au moins une semaine, calculer la probabilité pour que la durée dépasse 10 jours.
b) Comparez à la probabilité que l'immersion dépasse 3 jours. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 25: [Indications] [Correction] – Cours – Raisonner – Calculer –
Robert participe à la course de moissonneuses-batteuses de Rochechouart. Il doit parcourir 60 tours qui sont éprouvants pour les pneumatiques de son engin. Il devra en changer exactement une fois ou deux fois selon leur degré d'usure. La probabilité pour qu'il en change deux fois est de $p = 0,4$.

À chaque passage à son stand, ses mécaniciens changent les quatre roues. Le temps mis pour changer une roue en minutes suit une loi exponentielle de moyenne 5. On change évidemment les 4 roues en même temps.

1. On note X le temps passé au stand pour un arrêt. Calculer la fonction de répartition puis la densité de X .
2. En déduire la loi de probabilité de T , temps total passé au stand sur toute la course.

EXERCICE 26: [Indications] [Correction] – Mobiliser –

Chaque jour à 20 heures, Jacques attend Madeleine avec ses lilas. Le temps qu'il doit patienter avant son arrivée suit une loi exponentielle de moyenne 5 heures. Si elle arrive avant 22 heures, ils vont manger des frites chez Eugène par le tram 33, sinon, il rentre seul chez lui par le tram 21. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tickets de tram qu'il utilise en septante jours.

(On considère qu'il n'y a pas de phénomène de lassitude et que tous les soirs sont indépendants.)

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $V(X)$.

Indications

Exercice 5 [Correction]

1. On pensera à déterminer les supports en premier lieu.

Exercice 6 [Correction]

1. Passer par la fonction de répartition

- 2.** Passer par la fonction de répartition

Exercice 13 [Correction]

- 2.** Essayez de ne pas refaire les calculs.

Exercice 17 [Correction]

- 4. c)** Déterminer la loi de la quantité de grain T mangée par n poules en un an. Puis se ramener à une variable suivant une loi normale centrée réduite pour pouvoir utiliser la table de la loi normale.

Exercice 26 [Correction]

- 1.** septante signifie 70...

On pourra commencer par considérer le nombre T de tickets utilisés un des soirs.

Exercice 1

1. $k = \frac{1}{8}$.
2. On a

$$P(2 \leq X \leq 6) = \int_2^6 f(x) dx = \int_2^4 kx dx = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

3. ★ Méthode 1 : Avec les définitions initiales :

On a

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f$$

Si $x < 0$, on a

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 = 0$$

Si $x \in [0, 4]$, on a

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f = \int_0^x \frac{t}{8} dt = \left[\frac{t^2}{16} \right]_0^x = \frac{x^2}{16}$$

Si $x > 4$, on a

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f = \int_0^4 \frac{t}{8} dt = \left[\frac{t^2}{16} \right]_0^4 = \frac{4^2}{16} = 1$$

D'où

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si } x \in [0, 4] \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

★ Méthode 2 : Avec la primitive de f et le support :

f étant nulle en dehors de $[0, 4]$, on sait que son support est dans $[0, 4]$ et que donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

f étant continue sauf en $0, 4$, on sait que la fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, 4\}$ avec

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0, 4$$

On sait donc qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{k}{2}x^2 + \alpha & \text{si } x \in [0, 4[\\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

et par continuité en 0 , on trouve $0 = \alpha$.

★ Conclusion :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{16}x^2 & \text{si } x \in [0, 4[\\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

4. On a

$$P((X - 2)(X - 6) \leq 0) = F(6) - F(2) = 1 - \frac{1}{16}2^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

5. $\text{Supp}(Y) = [0, 4]$.
Soit $t \in [0; 4]$.

$$\begin{aligned} P(Y \leq t) &= p((X-2)^2 \leq t) \\ &= p(-\sqrt{t} \leq X-2 \leq \sqrt{t}) \\ &= p(2-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}+2) \\ &= \int_{2-\sqrt{t}}^{2+\sqrt{t}} f(x) dx \end{aligned}$$

or, on note que, comme $t \in [0, 4]$, on a $\sqrt{t} \in [0, 2]$ et donc

$$2 - \sqrt{t} \geq 0 \quad 2 + \sqrt{t} \leq 4$$

d'où

$$\begin{aligned} P(Y \leq t) &= \int_{2-\sqrt{t}}^{2+\sqrt{t}} kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_{2-\sqrt{t}}^{2+\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{16} \left((2+\sqrt{t})^2 - (2-\sqrt{t})^2 \right) = \frac{8}{16} \sqrt{t} \end{aligned}$$

i.e.

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{t} & \text{si } t \in [0; 4] \\ 1 & \text{si } t > 4 \end{cases}$$

6. F_Y est continue et $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et 4. Y admet donc une densité f_Y , donnée par

$$f_Y(t) = F'_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{t}} & \text{si } t \in]0; 4[\\ 0 & \text{si } t > 4 \end{cases}$$

que l'on peut prolonger de n'importe quelle manière en 0 et 4 :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{t}} & \text{si } t \in [0; 4] \\ 0 & \text{si } t > 4 \end{cases}$$

Exercice 2

1. f est continue sauf en a et $f \geq 0$.

Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{t}\right)^{\alpha+1} dt$ est convergente (vers 1) :

Problème en $+\infty$. On intègre.

$\forall x \geq a$, on a

$$\int_a^x \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{t}\right)^{\alpha+1} dt = \frac{1}{a} a^{\alpha+1} \int_a^x \alpha t^{-\alpha-1} dt = a^\alpha [-t^{-\alpha}]_a^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

2. De la densité nulle sur $] +\infty, a[$, on tire $\text{Supp}(X) \subset [a, +\infty[$ et donc

$$F(x) = 0 \quad \forall x < a$$

D'après le cours, on sait que F est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} - \{a\})$ avec

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x > a$$

d'où, d'après les calculs de primitive déjà effectués dans la question précédente, l'existence de $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = -a^\alpha x^{-\alpha} + \beta \quad \forall x > a$$

et par limite de F en $+\infty$ valant 1, et/ou continuité en a , on trouve

$$\beta = 1$$

et donc finalement

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - a^\alpha x^{-\alpha} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

3. Notons que si le moment d'ordre 2 existe, il en va de même pour la variance et l'espérance.

• Moment d'ordre 2 :

Il existe ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \alpha a^\alpha \int_a^{+\infty} x^{-\alpha+1} dx$ converge absolument, i.e. "converge" car tout est positif.

Or, après étude, on constate que cette intégrale cv ssi $\alpha > 2$ et qu'on a dans ce cas

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \alpha a^\alpha \frac{a^{-\alpha+2}}{\alpha-2} = \frac{\alpha}{\alpha-2} a^2$$

• Moment d'ordre 1 :

Il existe ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \alpha a^\alpha \int_a^{+\infty} x^{-\alpha} dx$ converge absolument, i.e. "converge" car tout est positif.

Or, après étude, on constate que cette intégrale cv ssi $\alpha > 1$ et qu'on a dans ce cas

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \alpha a^\alpha \frac{a^{-\alpha+1}}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1} a$$

• Conclusion :

$\mathbb{E}[X]$ existe ssi $\alpha > 1$ et dans ce cas

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha-1} a}$$

$V[X]$ existe ssi $\alpha > 2$ et dans ce cas, d'après la formule de HK :

$$\boxed{V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = a^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 \right)}$$

Exercice 3

1. $P(X^2 - X < 0) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{\pi} \arctan(1) = \frac{1}{4}$.
2. Pas d'espérance (et donc pas non plus de variance.)

3. $F_Y(t) = 0$ si $t < 0$ et $F_Y(t) = P(-\sqrt{t} \leq |X| \leq \sqrt{t})$ sinon. On trouve $g : t \rightarrow \frac{2}{\pi(1+t)\sqrt{t}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$

Exercice 4

1. $\alpha = \frac{4}{a^2}$
2. $P\left(X > \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $P\left(\frac{a}{2} - b < X \leq \frac{a}{2} + b\right) = \frac{4b(a-b)}{a^2}$
3. $P(A \cap B) = P\left(\frac{a}{2} < X \leq \frac{a}{2} + b\right) = \frac{\alpha}{2} b(a-b)$

Exercice 5

1. Comme X est positive, F et f sont nulles sur $] -\infty; 0[$. $P(\sqrt{X} \leq x)$:
Soit $x \leq 0$. $P(\sqrt{X} \leq x) = 0$
Soit $x > 0$. $P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F(x^2)$
En conclusion, on peut dire que

$$P(\sqrt{X} \leq x) = F(x^2) \mathbb{1}_{[0,+\infty[} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $P(\ln(X) \leq x)$:
Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(\ln X \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x)$
En conclusion, on peut dire que

$$P(\ln X \leq x) = F(e^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. a)
3. • Soit $x > 0$ $P(\sqrt{X} \leq x) = F(x^2) = \int_{-\infty}^{x^2} f(t) dt$ On pose $u = \sqrt{t}$; $t = u^2$, $dt = 2u du$. On trouve

$$P(\sqrt{X} \leq x) = \int_{-\infty}^x 2u f(u^2) du$$

La densité de $\sqrt{X}$ est $h : t \mapsto 2t f(t^2) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $P(\ln X \leq x) = F(e^x) = \int_{-\infty}^{e^x} f(t) dt = \int_0^{e^x} f(t) dt$ On pose $u = \ln t$; $t = e^u$, $dt = e^u du$. On trouve

$$P(\sqrt{X} \leq x) = \int_0^x e^u f(e^u) du = \int_{-\infty}^x e^u f(e^u) du$$

La densité de $\ln X$ est $h : t \mapsto e^t f(e^t)$.

Exercice 6

1. On note F et G les fonctions de répartition respectives de X et Y .

Dans une feuille précédente, on avait déterminé la fonction de répartition F_Z de cette variable $Z = \max(X, Y)$. On avait

$$F_Z(x) = F(x)G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Or, X et Y étant à densité, on sait que F, G sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. Par produit, il en va de même pour F_Z . En conclusion, Z est à densité.

2. De même que pour la question précédente, on avait déterminé dans une feuille précédente, la fonction de répartition F_T de cette variable $T = \min(X, Y)$. On avait

$$F_T(x) = 1 - (1 - F(x))(1 - G(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Or, X et Y étant à densité, on sait que F, G sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. Par produit, il en va de même pour F_T . En conclusion, T est à densité.

3. a) On note X_i chacun des résultats avec F_i leur fonction de répartition. On a donc n variables indépendantes avec $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$. On a immédiatement $\text{Supp}(Z) = [0, 1]$. De même que pour les questions ci-dessus, on obtiendra que la fonction de répartition F de Z de valeurs :

$$F(x) = F_i(x)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'où

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- b) On cherche $P(Z > \frac{1}{2}) \geq 0.99$
Or

$$\begin{aligned} P(Z > \frac{1}{2}) \geq 0.99 &\Leftrightarrow F(\frac{1}{2}) < 0.01 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0.01 \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln 0.01 \\ &\Leftrightarrow n > -\frac{\ln 0.01}{\ln 2} \simeq 6,64 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient un nombre minimal de tirage à

$$\boxed{n = 7}$$

- c) On observe que F est continue sur $\mathbb{R}$ (à faire) et qu'elle est également $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0, 1. Ainsi, Z est à densité.

Exercice 7

1. • Support de $|X|$: Il est clair que $|X| \geq 0$.

- Densité de $|X|$:

★ Pour $x < 0$ on a

$$p(|X| \leq x) = 0 = \int_{-\infty}^x (f(t) + f(-t)) \underbrace{\mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t)}_{=0 \text{ car } t \leq 0} dt$$

★ Pour $x \geq 0$:

$$p(|X| \leq x) = p(-x \leq X \leq x) = \int_{-x}^x f(t) dt = \int_{-x}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

Changement de variable dans la première intégrale : $t = -u$.

$$\int_{-x}^0 f(t) dt = - \int_x^0 f(-u) du = \int_0^x f(t) dt$$

D'où

$$p(|X| \leq x) = \int_0^x (f(t) + f(-t)) dt = \int_{-\infty}^x (f(t) + f(-t)) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(t) dt$$

.

2. • Support de X^2 : Il est clair que $X^2 \geq 0$.

• Densité de X^2 :

★ Pour $x < 0$ on a bien

$$p(X^2 \leq x) = 0 = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t}) \right) \underbrace{\mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t)}_{=0 \text{ car } t \leq 0} dt$$

★ Pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_{X^2}(x) &= p(X^2 \leq x) = p(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t) dt \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^0 f(t) dt + \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt \\ &= - \int_0^{-\sqrt{x}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt \end{aligned}$$

La fonction F_{X^2} est dérivable sur $x \in]0; +\infty[$, avec

$$F'_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f(-\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$$

La fonction F_{X^2} étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, la variable aléatoire X^2 est à densité, avec comme densité

$$f_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f(-\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme on peut choisir n'importe quelle valeur pour $f_{X^2}(0)$, on en déduit que

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{t}} (f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t) \text{ est bien une densité de } X^2}$$

Exercice 8

1. On note f la fonction densité de X . D'après le cours, on a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{1}{\pi} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. L'espérance et la variance sont donnés par le cours :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2})}{2} = 0$$

$$V(X) = \frac{(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}))^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}$$

3. • Support de Y :

Tout d'abord, comme $X \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on obtient un support infini pour Y qui est

$$\text{Supp}(Y) = \mathbb{R}$$

On ne peut donc rien en déduire d'intéressant pour l'instant.

• Fonction de répartition F_Y de Y :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\tan X \leq x) \\ &= P(X \leq \arctan x) \quad \text{car } \arctan \text{ est croissante.} \\ &= F_X(\arctan x) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

On observe que F_Y est continue et $\mathcal{C}^1$ partout sur $\mathbb{R}$, ainsi, Y est une variable à densité, notée f_Y , avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f_Y(x) = F'_Y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}}$$

Exercice 9

1. • Support de Y :

On observe que de manière évidente, Y est une variable positive. De plus, ayant $X \in [-1, 1]$, on aura $X^2 \in [0, 1]$. Ainsi,

$$\text{Supp}(Y) = [0, 1]$$

• Fonction de répartition F_Y de Y :

D'après le support, on a immédiatement

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Si $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) = P(X^2 \leq x) &= P(|X| \leq \sqrt{x}) \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t) dt \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} dt \quad \text{car } -\sqrt{x}, \sqrt{x} \in]-1, 1[\\ &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

D'où

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On observe que la fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (entier) et $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et 1. On en déduit que c'est une variable à densité, (notée f_Y)

2. D'après le résultat de la fonction de répartition, on sait que

$$f_Y(x) = F'_Y(x) \quad \forall x \neq 0, 1$$

i.e.

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On complète ensuite les x restants en prolongeant par exemple la fonction avec

$$f_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0, 1]}(x)$$

3. La variable Y est à support borné. Elle admet donc des moments de tout ordre.

• Ésperance :

D'après ce que l'on vient de dire, l'ésperance existe bel et bien, avec

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{2} dt \\ &= \left[\frac{\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

i.e.

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}$$

ou alors, plus simple, avec le théorème de transfert, sachant que le moment d'ordre 1 existe :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 t^2 \frac{1}{2} dt \\ &= \left[\frac{\frac{1}{3} t^3}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- Moment d'ordre 2 :

De même, avec le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X^4] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 f_X(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 t^4 \frac{1}{2} dt \\ &= \left[\frac{\frac{1}{5} t^5}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

i.e.

$$\boxed{\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{5}}$$

- Variance :

Pour finir, par formule de Huygens-Koenig, on a

$$V(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{9-5}{45} = \frac{4}{45}$$

i.e.

$$\boxed{V(Y) = \frac{4}{45}}$$

Exercice 10

1. $f_{X_1+X_2}(x) = \begin{cases} \int_0^x dt = x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \int_{x-1}^1 dt = 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1-|1-x| & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. • Densité de $-X_2 : u \mapsto f(-u)$.
• Densité de $X_1 - X_2 :$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(-x+t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0;1]}(t) \mathbb{1}_{[0;1]}(-x+t) dt$$

D'où

$$h(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0;1]}(-x+t) dt = \int_0^1 \mathbb{1}_{[x;x+1]}(t) dt$$

En conclusion,

$$h(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$3. \quad f_{X_1+X_2+X_3}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{(x-3)^2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1-|1-x| & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 11

1. On note Δ le discriminant de l'équation :

$$\Delta = A^2 - 4$$

Ainsi, la probabilité d'avoir deux racines réelles distinctes est

$$P(\Delta > 0) = P(A > 2) + P(A < -2) = 0$$

car A est une variable à densité.

2. Ainsi, la probabilité d'avoir deux racines complexes distinctes est

$$P(\Delta > 0) = P(A^2 < 4) = P(-2 < A < 2) = \int_{-2}^2 f(f) dt$$

où f est la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(3, 2)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-3}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

On fait appel à la calculatrice, à Python ou à la table de la loi normale centrée réduite pour le résultat.

Si on fait appel à la loi normale centrée réduite, il faut réduire la variable A de la manière suivante :

$$\begin{aligned}P(-2 < A < 2) &= P\left(\frac{-2-3}{\sqrt{2}} < \frac{A-3}{\sqrt{2}} < \frac{2-3}{\sqrt{2}}\right) \\ &= P\left(\underbrace{\frac{-5}{\sqrt{2}}}_{\simeq -3,535} < \underbrace{\frac{A-3}{\sqrt{2}}}_{\hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)} < \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{2}}}_{\simeq -0,707}\right) \\ &\simeq \Phi(-0,707) - \Phi(-3,535)\end{aligned}$$

- Si on prend la table de la loi normale, il faut des abscisses positives :

$$P(-2 < A < 2) = 1 - \Phi(0,707) - (1 - \Phi(3,535)) = \Phi(3,535) - \Phi(0,707)$$

Pour plus de précision, on peut faire une petite interpolation linéaire. On rappelle que l'équation d'une droite Φ est

$$\Phi(x) = \frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{b - a}(x - a) + \Phi(a)$$

D'où, pour $a = 0,7$ et $b = 0,71$,

$$\Phi(0,707) \simeq \Phi(0,70) + 0,07(\Phi(0,71) - \Phi(0,7)) \simeq 0,75804 + 0,07*(0,76115 - 0,75804) \simeq 0,75826$$

et de même

$$\Phi(3,535) \simeq \Phi(3,53) + 0,05(\Phi(3,54) - \Phi(3,53)) \simeq 0,99979 + 0,05(0,9998 - 0,99979) \simeq 0,99979$$

D'où

$$P(\Delta < 0) \simeq 0,99979 - 0,75826 \simeq 0,24123$$

- Si on prend python et la loi normale centrée réduite :

```
1 import scipy.stats as sc
2
3 X=sc.norm()
4 X.cdf(-0.707)-X.cdf(-3,535)
```

On obtient

$$P(\Delta < 0) \simeq 0,2396$$

- Directement avec python et la loi $\mathcal{N}(3,2)$:

(le plus précis)

```
1 import scipy.stats as sc
2
3 X=sc.norm(3,np.sqrt(2))
4 X.cdf(2)-X.cdf(-2)
```

On obtient

$$P(\Delta < 0) \simeq 0,2395$$

3. C'est l'événement complémentaire des deux autres, d'où

$$P(\Delta > 0) \simeq 1 - 0,2395 \simeq 0,7604$$

Exercice 12

1. $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$.
2. $\mathcal{L}(-2X) = \mathcal{N}(-2 \times 2, 2 \times 1)$
3. $\mathcal{L}(X + b) = \mathcal{N}(2 + b, 1)$

Exercice 13

1. X admettant une densité (notée φ), d'après le théorème de transfert, on sait que Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{at+b}| \varphi(t) dt$ converge. Étudions cette intégrale.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{at+b}| \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at+b} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2 + at + b} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2 - 2at - 2b)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}((t-a)^2 - a^2 - 2b)} dt \\ &= e^{\frac{1}{2}a^2 + b} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(t-a)^2}}_{\text{densité d'une v.a. qui suit } \mathcal{N}(a,1)} dt}_{\text{donc converge de valeur 1}} \end{aligned}$$

D'où l'existence de l'espérance avec

$$\mathbb{E}[Z] = e^{\frac{1}{2}a^2 + b}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $Z^n = e^{naX + nb}$. Ainsi, en prenant $A = na$ et $B = nb$, on a $Z = e^{AX+B}$ et on est donc confronté au même cas que dans la question 1. L'espérance existe avec

$$\mathbb{E}[Z^n] = e^{\frac{1}{2}n^2 a^2 + nb}$$

3. Comme le moment d'ordre 2 existe, on sait que

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = e^{\frac{1}{2} \times 4a^2 + 2b} - \left(e^{\frac{1}{2}a^2 + b}\right)^2 = e^{2a^2 + 2b} - e^{a^2 + 2b}$$

D'où

$$V(Z) = e^{a^2 + 2b} (e^{a^2} - 1)$$

Exercice 14

- Fonction de répartition de Z :

★ $Supp(Z) \subset [0; +\infty[$, d'où

$$\forall z \leq 0, \quad P(Z \leq z) = 0$$

★ Soit $z \in]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(e^X \leq z) \\ &= P(X \leq \ln z) \quad \text{car } \ln \text{ est croissante bijective sur } \mathbb{R}_+^*. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \end{aligned}$$

D'où, en notant F_Z la fonction de répartition de Z , on a

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(\ln z) & \text{sinon} \end{cases}$$

- Densité de Z :

On constate que F_Z est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, avec

$$F'_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{1}{z} \Phi'(\ln z) = \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln z)^2} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

On en déduit que Z est à densité. De plus, comme on peut choisir $f(0)$ n'importe comment, on peut poser une densité de Z comme étant

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln z)^2} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

Exercice 15

1. On sait que

$$p(X \leq 20) \simeq \frac{250}{400} \quad p(X \geq 12) \simeq \frac{380}{400}$$

On sait que

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$$

avec

$$\mu = \mathbb{E}[X] \quad \sigma^2 = V(X)$$

Il s'agit donc d'évaluer les paramètres. On sait que

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$$

Or

$$p\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) \simeq \frac{250}{400} = 0,625 \quad p\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{12 - \mu}{\sigma}\right) \simeq 1 - \frac{380}{400} = 0,05$$

La table de la loi normale nous donne

$$\Phi(0,32) \simeq 0,625 \quad \Phi(-1,65) \simeq 0,05$$

Ceci nous donne un système d'équations sur μ, σ :

$$\frac{20 - \mu}{\sigma} \simeq 0,32 \quad \frac{12 - \mu}{\sigma} \simeq -1,65$$

On obtient

$$\boxed{\mu \simeq 17 \quad \text{et} \quad \sigma \simeq 8}$$

2. $p(X > 18) = p\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{18 - \mu}{\sigma}\right) \simeq \Phi(0,125) \simeq 0,55.$
3. $P_{(X>15)}(X > 18) = \frac{p(15 < X < 18)}{p(X > 15)} \simeq 0,25.$

Exercice 16

(Intuitivement, on peut faire un dessin sous la cloche, mais confirmons l'idée obtenue par le calcul.)

On pose f la densité de X :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

et F la fonction de répartition : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

où F est $\mathcal{C}^1$ car f est continue sur $\mathbb{R}$.

On pose

$$h : x \mapsto P(x < X \leq x+b) = F(x+b) - F(x)$$

h est continuellement dérivable. Si elle est maximale en un point a , on a $h'(a) = 0$, c'est-à-dire

$$0 = h'(a) = f(a+b) - f(a)$$

d'où

$$f(a+b) = f(a)$$

Or, la fonction f étant symétrique par-rapport à l'axe $x = m$ et injective de chaque côté, la seule possibilité est que $a+b$ et a soient symétriques par-rapport à m . Autrement dit, m sera le milieu de l'intervalle $[a, a+b]$ et donc

$$a = m - \frac{b}{2}$$

- Montrons que ceci correspond bien à la valeur maximale attendue :

Posons $a = m - \frac{b}{2}$, on construit de tableau de variation de h en cherchant le signe de h' .

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x+b) - f(x) \geq 0$$

- ★ Si $x \leq a = m - \frac{b}{2}$ et $x+b \leq m$, par croissance de f sur $]-\infty; m[$, on a clairement

$$f(x+b) \geq f(x)$$

d'où

$$h'(x) \leq 0.$$

- ★ Si $x \leq a = m - \frac{b}{2}$ et $x+b \geq m$, Par croissance sur $]-\infty, m]$,

$$f(x) \leq f(a)$$

De plus,

$$m \leq x+b \leq m - \frac{b}{2} + b = m + \frac{b}{2}$$

et donc, par décroissance de f sur $[m, +\infty[$,

$$f(x+b) \geq f\left(m + \frac{b}{2}\right).$$

par symétrie de f par-rapport à $x = m$, on a également

$$f\left(m + \frac{b}{2}\right) = f\left(m - \frac{b}{2}\right) = f(a)$$

et donc au final

$$f(x+b) \geq f(a) \geq f(x)$$

D'où

$$h'(x) \geq 0.$$

- ★ Si $x \geq a = m - \frac{b}{2}$, alors $x+b \geq m + \frac{b}{2}$

La raisonnement précédent s'applique dans l'autre sens et on obtient

$$h'(x) \leq 0$$

- ★ Après résumé de tout ceci dans un tableau de variation, on obtient bien un maximum.

Exercice 17

1. On note X_i la quantité de blé contenue dans le sac i . Alors

$$X = X_1 + \dots + X_9$$

où les X_i sont mutuellement indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(80; 0.25)$. On sait donc que

$$X \sim \mathcal{N}(9 \times 80; 9 \times 0.25) = \mathcal{N}(720; 2.25)$$

2. La densité de la loi normale étant symétrique par-rapport à $\mu = E(X) = 720$, on a

$$P(X \leq 720) = \frac{1}{2}$$

3. $Y = X - M$, où M est la variable aléatoire correspondant à la quantité de nourriture mangée par les souris.

On sait que

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(720; 2.25), \quad M \rightsquigarrow \mathcal{N}(50; 20^2), \quad X, Y \text{ indépendantes}$$

On sait alors que

$$-M \rightsquigarrow \mathcal{N}(-50; 20^2)$$

puis que

$$X - M \rightsquigarrow \mathcal{N}(720 - 50, 2.25 + 20^2) = \mathcal{N}(670, 402.25)$$

i.e.

$$\boxed{Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(670, 402.25)}$$

4. a) D'après la table inversée de la loi normale centrée réduite, on constate que

$$\boxed{\Phi(-1.65) = 0.05}$$

- b) On note J la quantité mangée par une poule en un jour. Alors

$$J \rightsquigarrow \mathcal{N}(0.15, 0.05^2)$$

La quantité mangée par une poule en 365 jours est la somme

$$A = J_1 + \dots + J_{365}$$

où les J_i sont des copies identiques et indépendantes de J , d'où

$$\boxed{A \rightsquigarrow \mathcal{N}(365 \times 0.15, 365 \times 0.05^2) = \mathcal{N}(54.75; 0.9125)}$$

- c) On note n le nombre de poules qu'elle peut nourrir. De la même manière que dans la question précédente, la quantité T mangée par n poules suit une loi

$$T \rightsquigarrow \mathcal{N}(54.75n; 0.9125n)$$

On cherche à déterminer n de manière à avoir

$$P(Y - T > 0) = 0.95$$

Or, Y et T suivent des loi normales indépendantes. Ainsi,

$$Y - T \rightsquigarrow \mathcal{N}(\underbrace{670 - 54.75n}_{\mu}, \underbrace{402.25 + 0.9125n}_{\sigma^2})$$

Ou encore

$$\frac{Y - T - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1)$$

D'où

$$\begin{aligned} P(Y - T > 0) = 0.95 &\Leftrightarrow P\left(\frac{Y - T - \mu}{\sigma} > \frac{-\mu}{\sigma}\right) = 0.95 \\ &\Leftrightarrow P\left(\frac{Y - T - \mu}{\sigma} < \frac{-\mu}{\sigma}\right) = 0.05 \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right) = 0.05 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{-\mu}{\sigma} = 1.65$$

La résolution de l'équation nous donne

$$\boxed{n = 11}$$

Exercice 18

1. • Fonction de répartition de X :

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln U \leq x\right) = P(\ln U \geq -\lambda x) = P(U \geq e^{-\lambda x}) = \int_{e^{-\lambda x}}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0;1]}(t) dt.$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^{-\lambda x} > 1 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases}$$

• Densité de X :

La fonction de répartition est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On pose

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît une loi exponentielle de paramètre λ , d'où $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$

2. Algorithme :

- On demande à l'utilisateur le paramètre λ .
- On demande à l'ordinateur un nombre u au hasard entre 0 et 1 (strictement).
- On rend le nombre $x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$.

Exercice 19

Commençons par la fonction de répartition F où on pourra calculer

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

qui est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (à étudier en 0) et $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, X est à densité. On la note f et on sait d'après le cours que pour tout $x \neq 0$, on a

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme on peut prolonger ensuite arbitrairement en 0, on obtient

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 20

$$1. \quad P(\tan X > 0) = P(X \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [0 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi]) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P([0 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi]).$$

Or, $X \geq 0$, d'où

$$P(\tan X > 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([0 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{\frac{\pi}{2} + k\pi} e^{-t} dt$$

$$\text{Or, } \int_{k\pi}^{\frac{\pi}{2} + k\pi} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{k\pi}^{\frac{\pi}{2} + k\pi} = e^{-k\pi} - e^{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \text{ d'où}$$

$$P(\tan X > 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} - \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2} + k\pi} = \frac{1}{1 - e^{-\pi}} - e^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - e^{-\pi}}$$

$$2. \quad e^{-X} \text{ étant positif, elle est intégrable ssi l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-x} dx \text{ est convergente, ce qui est le cas. On a}$$

$$E[e^{-X}] = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}$$

3. Algorithme :

- On demande à l'utilisateur le paramètre λ .
- On demande à l'ordinateur un nombre u au hasard entre 0 (strictement) et 1.
- On rend le nombre $x = \tan(-\frac{1}{\lambda} \ln u)$.

Exercice 21

- Fonction de répartition notée F de Y :

Tout d'abord, on a

$$\text{Supp}(Y) = \mathbb{R}$$

On ne peut donc rien dire a priori.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\ln X \leq x) \\ &= P(X \leq e^x) \\ &= 1 - e^{-\alpha e^x} \end{aligned}$$

La fonction F est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. C'est donc la fonction de répartition d'une variable à densité, notée ici f .

- Densité :

Comme F est $\mathcal{C}^1$, on obtient

$$f(x) = F'(x) = \alpha e^x e^{-\alpha e^x}$$

Exercice 22

- Fonction de répartition de X^3 :

★ $\text{Supp}(X^3) = \mathbb{R}^+$ d'où

$$\forall x \leq 0 \quad P(X^3 \leq x) = 0$$

★ Soit $x > 0$

$$P(X^3 \leq x) = P(X \leq \sqrt[3]{x}) = \theta \int_0^{\sqrt[3]{x}} e^{-\theta t} dt = [-e^{-\theta t}]_0^{\sqrt[3]{x}} = 1 - e^{-\theta \sqrt[3]{x}}$$

et donc

$$F_{X^3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\theta \sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Densité de X^3 :

La fonction de répartition est dérivable sauf peut être en 0, avec

$$F'_{X^3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\theta}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{-\theta x^{\frac{1}{3}}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

X^3 est donc à densité. On peut attribuer à $f(0)$ n'importe quelle valeur. Une densité de X^3 est donc

$$f_{X^3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\theta}{3x^{\frac{2}{3}}} e^{-\theta x^{\frac{1}{3}}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- On pose $T = \min(X, Y^3)$.

- Fonction de répartition de T :

★ $\text{Supp}(T) = \mathbb{R}^+$ d'où

$$\forall x \leq 0 \quad P(T \leq x) = 0$$

★ Soit $x > 0$

$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= 1 - P(T > x) \\ &= 1 - P(X > x, Y^3 > x) \\ &= 1 - P(X > x)P(Y^3 > x) \quad \text{ind.} \\ &= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_{Y^3}(x)) \end{aligned}$$

et donc

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_{Y^3}(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Densité de T :

La fonction de répartition est dérivable sauf peut être en 0, T est donc à densité.

3. • $\text{Supp}(X - Y) = \mathbb{R}$.

• On écrit $X - Y = X + (-Y)$.

★ Densité de $-Y$: On sait (ou on pourrait redémontrer) qu'une densité de $-Y$ est

$$y \mapsto f_Y(-y)$$

dém :

$$P(-Y \leq y) = P(Y \geq -y) = 1 - P(Y \leq -y) = 1 - F_Y(-y)$$

par dérivée, on retrouve bien le résultat annoncé.

★ Densité de $X + (-Y)$:

Si X et Y ind, alors X est ind de $-Y$. On sait donc que $X + (-Y)$ est une variable aléatoire à densité, dont la densité est donnée par une intégrale convergente :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt$$

Effectuons le calcul :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x - t) dt &= \int_0^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x - t) dt \quad \text{Supp}(X) \subset [0; +\infty[\\ &= \int_0^{+\infty} f_X(t) f_Y(t - x) dt \quad f_{-Y}(y) = f_Y(-y) \end{aligned}$$

Or, $f_Y(t - x) = 0$ si $t - x \leq 0$, c'est-à-dire

$$f_Y(t - x) = 0 \text{ si } t \leq x$$

D'où :

• Si $x \leq 0$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta t} \theta e^{-\theta(t-x)} dt \\ &= \theta e^{\theta x} \int_0^{+\infty} \theta e^{-2\theta t} dt \\ &= \underbrace{\frac{\theta}{2} e^{\theta x} \int_0^{+\infty} 2\theta e^{-2\theta t} dt}_{=1 \quad (\text{densité de } \mathcal{E}(2\theta))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{ Si } x > 0, \quad h(x) &= \int_x^{+\infty} \theta e^{-\theta t} \theta e^{-\theta(t-x)} dt \\ &= \theta e^{\theta x} \int_x^{+\infty} \theta e^{-2\theta t} dt \\ &= \frac{\theta}{2} e^{\theta x} \left[-e^{-2\theta t} \right]_x^{+\infty} \\ &= \frac{\theta}{2} e^{\theta x} e^{-2\theta x} \\ &= \frac{\theta}{2} e^{-\theta x} \end{aligned}$$

Au final, $X - Y$ est une variable aléatoire de densité :

$$h_{X-Y} : x \mapsto \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|}$$

Exercice 24

1. La fonction de répartition de X , durée d'une plongée est

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

D'où

$$0,887 = P(X > 6) = e^{-6\lambda}$$

et donc

$$\lambda \simeq 0,02$$

2. C'est $P(X \geq 7) = 1 - e^{-0,02 \times 7} \simeq 0,887$.

3. a) $P_{X \geq 7}(X \geq 10) = \frac{P(X \geq 10)}{P(X \geq 7)} = \frac{e^{-10\lambda}}{e^{-7\lambda}} = e^{-3\lambda} \simeq 0,942$

b) On constate que le résultat est le même que dans la question précédente. Il semblerait que la loi exponentielle oublie ce qui s'est passé avant pour recommencer à zéro à tout instant.

Exercice 25

1. On note T_i le temps pour changer la roue i . Alors

$$T_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1/5)$$

Ainsi, on observe que

$$X = \max(T_1, \dots, T_4)$$

Ainsi,

$$\text{Supp}(X) = [0, +\infty[$$

Soit donc $x \geq 0$,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^4 (T_i \leq x)\right) \underset{\text{ind. des } T_i}{=} \prod_{i=1}^4 P(T_i \leq x) = (1 - e^{-0,2x})^4$$

D'où

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-0,2x})^4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sauf éventuellement en 0. La variable X est donc une variable à densité f_X avec

$$\forall x \neq 0, \quad f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 4e^{-0,2x}(1 - e^{-0,2x})^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et on peut prolonger cette densité n'importe comment de manière positive, ainsi, une densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4}{5}e^{-0,2x}(1 - e^{-0,2x})^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. On note X_i le temps passé à l'arrêt numéro i et N le nombre d'arrêts effectués.

$$N - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$$

Alors, comme $\{(N = i)\}_{i=1,2}$ est un système complet de l'univers de probabilités non nulles, par formule des probabilités totales, on a

$$P(T \leq x) = P_{(N=1)}(T \leq x)P(N = 1) + P_{(N=2)}(T \leq x)P(N = 2)$$

Or, si $N = 1$, d'après la question précédente,

$$\mathcal{L}(T_{(N=1)}) = \mathcal{L}(X)$$

D'où

$$P_{(N=1)}(T \leq x)P(N = 1) = (1 - e^{-0,2x})^4(1 - p)$$

D'autre part,

$$\mathcal{L}(T_{(N=2)}) = \mathcal{L}(X_1 + X_2)$$

Il faut donc maintenant calculer la loi de $X_1 + X_2$ qui sont deux v.a. indépendantes. Elle ont donc une densité h donnée par

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_X(x-t) dt \\ h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_X(x-t) dt \quad \text{car } f_X(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ h(x) &= \int_0^x f_X(t)f_X(x-t) dt \quad \text{car } f_X(x-t) = 0 \text{ si } x-t < 0 \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 \int_0^x e^{-0,2t}(1 - e^{-0,2t})^3 e^{-0,2(x-t)}(1 - e^{-0,2(x-t)})^3 dt \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 e^{-0,2x} \int_0^x (1 - e^{-0,2t})^3 (1 - e^{-0,2(x-t)})^3 dt \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 e^{-0,2x} \int_0^x (1 - e^{-0,2(x-t)} - e^{-0,2t} + e^{-0,2x})^3 dt \end{aligned}$$

Exercice 26

1. On note T le nombre de tickets utilisés pour un seul soir. Alors

$$\text{Supp}(T) = \{1, 2\}$$

Alors

$$p = P(T = 2) = P(\text{"il attend au maximum 2 heures"}) = 1 - e^{\frac{2}{5}}$$

Or, le nombre N de soirs où Madeleine vient suit une loi binomiale

$$N \hookrightarrow \mathcal{B}(70, p)$$

Le nombre total de billets achetés correspond à

$$X = N + 70$$

D'où

$$X - 70 \hookrightarrow \mathcal{B}(70, p)$$

2. $\mathbb{E}[X] = 70 + 70p \simeq 93 \quad V(X) = 70p(1 - p) \simeq 16.$