

Applications linéaires

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] - Cours -

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto -x + \pi y$.
2. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
3. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
4. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.
5. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$.
6. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
7. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $x^2 + y^2 \neq 0$ et 0 sinon.
8. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto$ la solution du système d'équations en (u, v) :

$$\begin{cases} 3u - v = x \\ 6u + 2v = y. \end{cases}$$

9. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$.
10. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (\ln(3^{x\sqrt{2}}), x + y)$.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] - Cours - Raisonner -

Dire si les applications suivantes sont bien définies et linéaires.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. $u : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} ; f \mapsto f(a)$.
2. $u : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\}$.
3. $u : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t \in [0, 1]} f(t)$.
4. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}^1 : \lambda \mapsto$ la solution de l'équation différentielle $y' - \frac{y}{x^2+1} = 0$ valant λ en $x_0 = 1$.
5. $u : \mathcal{C}^1([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t) dt$.
6. $u : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto \sin x\}$.
7. $u : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto f(x) \sin x\}$.
8. $u : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R} ; f \mapsto \int_0^1 e^{-1+|f(t)|} dt$.
9. $u : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3$
10. $u : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - (X - 2)P' \in \mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] - Cours - Raisonner -

Dire si les application suivantes sont des endomorphismes / des isomorphismes :

1. $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] ; P \mapsto X^2 P' - nXP$
2. $u : \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$
 $(x, y, z) \mapsto x + (y - z)X$
3. $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] ; P \mapsto P'$
4. $u : \{f \in \mathcal{C}^1([-1, 1]) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0\} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}) ; f \mapsto f'$

Matrice dans une base, injectivité, surjectivité

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] - Calculer - Soit la matrice $B =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire de matrice B dans des bases fixées. Quelle est la dimension de E et celle de F ?
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f .

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] - Calculer -

1. Déterminer si possible la matrice de u dans une base choisie (On admettra que l'application u est linéaire).

- a) $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (\pi x - z, x + 2y)$
- b) $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $P \mapsto P(0)(-1, 2, 0, -1) + (P(1) - P'(0))(0, 1, -2, -1)$
- c) $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$
 $P \mapsto (X^2 + 2)P' - 3XP$
- d) $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
 $P \mapsto (P(0), P(1), \dots, P(n))$
- e) $u : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
 $f \mapsto f'$

2. Dire, dans chaque cas, si l'application linéaire est injective / surjective / bijective ? Puis déterminer $\text{Im } u$ et $\ker u$ de la manière la plus rapide possible si ce n'est pas déjà fait.

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] (ENS) – Raisonner – ☆

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \varphi(x), \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E . ☆
2. En déduire une matrice de φ et $\text{rg } \varphi$.

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] – Calculer – Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E , et λ un paramètre réel. Soit φ un

endomorphisme de E défini par
$$\begin{cases} \varphi(e_1) = e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) = e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) = e_1 + \lambda e_3 \end{cases}$$

1. Quelle est l'image de $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ par φ .
2. Comment choisir λ pour que φ soit surjective ? injective ?

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – Calculer – On considère les applications

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, 2x + y, y) \quad (x, y, z) \mapsto (x + z, 5x - 2y + z)$$

1. On admet que f, g sont linéaires. Donner leur noyau et leur image.
2. Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. Qu'en est-il de $f \circ g$?

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – Calculer – Raisonner –

Soit $\varphi: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$.

Montrer que φ est un endomorphisme et préciser une base de son noyau.

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – Calculer – Raisonner – On considère l'application

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x - y, -4x + 2y)$$

1. u est-elle linéaire ?
2. a) Donner son noyau.
b) Quel est le rang de u ?
c) u est-elle surjective ?
d) Déterminer $\text{Im } u$.
3. Reprendre l'exercice avec $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Déterminer $(x, y) \mapsto (x + y, -x - y)$ dans ce cas $u^2 = u \circ u$ sans faire de calculs supplémentaires. ☆

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – Raisonner –

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ où a est un nombre complexe donné non nul.

$$z \mapsto z + a\bar{z}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – Raisonner –

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$.

Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – Raisonner – ☆☆

Soit $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $U: E \rightarrow E$ définie par $f \mapsto U(f)$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt. \\ \text{et } U(f)(0) = f(0). \end{cases}$$

1. Montrer que $U \in L(E)$.
2. Déterminer $\ker U$ et $\text{Im } U$.
3. Donner un exemple de fonction dans $\text{Im } u$ qui n'est pas dans $\mathcal{C}^1([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et en donner un antécédent.

Changement de base

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – Calculer –

1. Soient $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, ainsi que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$M(f)_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer $M(f)_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_3}$ où $\mathcal{B}'_2 = \{(1, 0)_{\mathcal{B}_2}, (-1, 1)_{\mathcal{B}_2}\}$.
 - b) Déterminer $M(f)_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}$ où $\mathcal{B}'_3 = \{(1, -1, 1)_{\mathcal{B}_3}, (-1, -1, 1)_{\mathcal{B}_3}, (0, 2, 0)_{\mathcal{B}_3}\}$.
 - c) En déduire $\ker f$.
2. a) Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace vectoriel E et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$M(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, (-1, 1, 0)_{\mathcal{B}}, (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}\}$

- b) En déduire l'expression de f^n dans la base $\mathcal{B}$.

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] – Calculer – ☆

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $\ker(u) = \text{Vect}\{X^2 - X, X^2 + 1\}$ et $u(2 + X) = 1 + X$.

1. Choisir deux bases adéquates $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ respectivement dans l'espace de départ et d'arrivée afin de pouvoir constituer facilement la matrice de u dans ces bases. On la note $M_{\mathcal{B}, \mathcal{G}}(u)$.
2. En déduire l'image par u de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – *Calculer* –

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ la base canonique, $\mathcal{B}_1 = \{1 + X^2, X + 2X^2, 1 + 3X^2\}$ une autre base (admis) de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1$.

Pour aller un peu plus loin

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] (*ENS*) ☆☆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et Δ l'endomorphisme de E déterminé par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Justifier que l'endomorphisme Δ est nilpotent (c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^m = 0$.)
2. Déterminer des réels $a_0, \dots, a_n, a_{n+1}$ non triviaux vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X+k) = 0$$

(ind : écrire $\Delta = T - Id$ où $T : P(X) \mapsto P(X+1)$.)

EXERCICE 18: [Indications] [Correction] (*ENS*) ☆☆

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $\{\vec{x}, f(\vec{x})\}$ est liée.
 - a) Montrer que si $\vec{x} \neq \vec{0}$, il existe un unique scalaire $\lambda_{\vec{x}}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}} \vec{x}$.
 - b) Comparer $\lambda_{\vec{x}}$ et $\lambda_{\vec{y}}$ lorsque $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre.
 - c) Montrer que f est une homothétie (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$.) ☆
2. Montrer que si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tous les endomorphismes de E , f est une homothétie. ☆☆

Indications

Exercice 6 [Correction]

1. Prendre une combinaison linéaire nulle et l'évaluer par φ^{n-1} .

Exercice 12 [Correction]

Se souvenir que $f : E \rightarrow E$ est inversible ssi il existe une application g telle que $f \circ g = g \circ f = Id$.

Exercice 15 [Correction]

1. $\ker u$ est dans "l'espace de départ", tout comme $2 + X$. En revanche, $1 + X$ est dans "l'espace d'arrivée."

Exercice 16 [Correction]

Avant de s'attaquer à la formule matricielle, se pose la question de la détermination directe.

Exercice 18 [Correction]

1.
 - b) faire intervenir $\vec{x} + \vec{y}$ pour montrer que $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$
 - c) Montrer que pour $(\vec{x}, \vec{y})$ est liée on a aussi $\lambda_{\vec{x}} = \lambda_{\vec{y}}$

Exercice 1

1. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto -x + \pi y$: **Oui.**
2. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$: **Non**, $u(-x) \neq -u(x)$ pour n'importe quel $x \neq 0$.
3. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$: **Non**, $u(0) \neq 0$.
4. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$: **Non**, $u(-1) \neq -u(1)$
5. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$: **Non**.

$u(2(x, y)) \neq 2\sin(x, y)$ en général. Par exemple, si

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$$

alors

$$u(x, y) = 1$$

il est alors impossible que

$$u(2(x, y)) = 2u(x, y) = 2$$

6. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/e, -x\sqrt{5})$: **Oui**
7. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$: **Non** :

Si $x \neq 0$,

$$u((x, 1) + (-x, 1)) = u(0, 1) = 0$$

et

$$u(x, 1) + u(-x, 1) = 2 \frac{x^2}{x^2 + 1^2} \neq 0$$

8. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto$ la solution du système d'équations en (u, v) :

$$\begin{cases} 3u - v = x \\ 6u + 2v = y. \end{cases}$$

oui :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ où } P \text{ est la matrice inversible } P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

9. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; (x, y) \mapsto (y, x)$: **oui**
10. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (\ln(3^{x\sqrt{2}}), x + y)$: **Oui.**

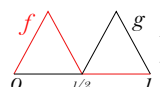
Exercice 2

La justification rapide de chacun de cas ci-dessous fait abstraction de la vérification des espaces vectoriels, ce qui devrait être fait à chaque fois dans une rédaction complète.

1. $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} ; f \mapsto f(a)$: **oui.**
2. $u : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\}$: **Oui**
3. $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} ; f \mapsto \max_{t \in [0,1]} f(t)$: **non**

$$(u(-f)) \neq -u(f) : u(-f)(x) = -\min_{t \in [0,1]} f(t),$$

ou alors $u(f+g) \neq u(f) + u(g)$:



4. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \lambda \mapsto$ la solution de l'équation différentielle $y' - \frac{y}{x^2+1} = 0$ valant λ en $x_0 = 1$:

Oui : Soient $\lambda, \mu, t \in \mathbb{R}$. $u(\lambda)$ et $u(\mu)$ sont toutes deux des solutions de l'équation différentielle. Ainsi, on sait que $u(\lambda) + tu(\mu)$ sera solution de l'équation (l'ensemble des solutions d'une équation diff est un espace vectoriel.)

De plus,

$$(u(\lambda) + tu(\mu))(1) = u(\lambda)(1) + tu(\mu)(1) = \lambda + t\mu$$

De telles solutions étant uniques, on trouve

$$u(\lambda + t\mu) = u(\lambda) + tu(\mu)$$

5. $u : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t) dt$: **Oui** :
par composition d'applications linéaires.
6. $u : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto \sin x\}$: **Non** :

$$u(0) \neq 0.$$

7. $u : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto f(x) \cdot \sin x\}$: **Oui**

8. $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} ; f \mapsto \int_0^1 e^{-1+|f(t)|} dt$: **non**

$$(u(-f)) \neq u(f) \neq -u(f)$$

9. $u : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3$: **Oui** :

Elle est linéaire sur chaque coordonnée.

10. Par rapport à la variable P , le polynôme $A = (X - 2)$ est une constante. Ainsi, u est donc combinaison linéaire de deux applications linéaires (identité et dérivée). Elle est linéaire. **Oui.**

Exercice 3

1. Oui pour l'endomorphisme. Clairement linéaire comme somme d'AL. On vérifie que $\deg u(P) \leq n$:

• *Méthode 1 :*

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On pose $P = a_n X^n + Q$ où $\deg(Q) < n$. On a alors

$$u(P) = X^2(na_n X^{n-1} + X^2 Q') - nX(a_n X_n + Q) = 0X^n + \underbrace{\quad}_{\text{polynôme de degré} \leq n}$$

• *Méthode 2 :*

A priori, on a $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n+1}[X]$. En construisant la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, on constate que la dernière ligne de la matrice est constituée entièrement de 0, ce qui signifie que

$$u(X^i) \in \mathbb{R}_n[X] \quad \forall i = 0, \dots, n$$

et donc

$$\mathfrak{Im}(u) = \text{Vect}(u(1), \dots, u(X^n)) \subset \mathbb{R}_n[X]$$

Non pour l'isomorphisme. $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X] \neq \mathbb{R}[X]$.

2. Non pour l'endomorphisme : L'espace de départ n'est pas du même type que l'espace d'arrivée !

Oui pour l'isomorphisme : C'est une application linéaire. Elle est injective car de noyau nul :

$$u(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = z$$

Or, $(x, y, z) \in \text{Vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$. Ainsi, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z) = (-2\alpha + 3\beta, \alpha, \beta)$$

Les conditions donnent donc $\alpha = \beta$ (pour les deux dernières coordonnées) puis

$$0 = x = -2\alpha + 3\beta = \beta = \alpha$$

D'où $(x, y, z) = \vec{0}$.

L'application est donc bijective grâce au théorème du rang.

3. Clairement oui pour l'endomorphisme., mais Non pour l'isomorphisme :
 $u(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_1[X] \neq \mathbb{R}_2[X]$.

4. Non, ni l'un ni l'autre.

Clairement linéaire, mais f' n'est pas forcément d'intégrale nulle. Ex : $f(t) = t$. Autrement dit, si on note E l'espace duquel on est parti, on n'a pas $u(E) \subset E$.

Exercice 4

2. Par les opérations sur les colonnes "standards", on trouve

$$B \underset{\substack{c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -2 \\ -3 & 11 & 11 & 0 \end{pmatrix} \underset{2c_3 - c_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\underset{c_4 - c_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 11 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Les opérations de colonnes nous donnent immédiatement comme résultats : $\text{rg}(B) = 3$, avec

$$\mathfrak{Im}(B) = \text{Vect}((1, -1, -3), (0, 4, 11), (0, 0, 11))$$

ou alors, comme $\mathfrak{Im} B = \mathbb{R}^3$ ($\mathfrak{Im} B \subset \mathbb{R}^3 + \dim \mathbb{R}^3 = \text{rg} B$), on peut aussi donner comme base la base canonique ou toute autre base de $\mathbb{R}^3$.

Le théorème du rang nous indique que

$$\dim \ker B = 4 - 3 = 1$$

Il suffit de trouver un vecteur non nul de $\ker B$. Or, celui-ci nous est donné par les opérations de colonnes effectuées :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2 - 2c_1 \\ c_3 - 3c_1 \\ c_4 - c_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{2c_3 - c_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{c_4 - c_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\ker B = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 5

1. a) Dans les bases canoniques :

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\text{rg} u = 2$ (d'où

$$\text{Im } u = \mathbb{R}^2$$

) u est donc surjective, mais u n'est pas injective : $\ker u = \text{Vect}(-2, 1, -2\pi)$

$$\text{b) } u : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} P \\ P \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} P(0)(-1, 2, 0, -1) + (P(1) - P'(0))(0, 1, -2, -1) \end{matrix}$$

$$\text{Dans les bases canoniques : } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rg} u = 2$ alors u n'est pas surjective, et

$$\text{Im } u = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

puis $\dim \ker u = 3 - 2 = 1$ avec

$$\ker u = \text{Vect}((X^2 - X))$$

donc u n'est pas injective.

$$\text{c) Dans les bases canoniques } (1, X, X^2, X^3) \text{ et } (1, X, X^2, X^3, X^4) : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ D'où } \text{Im } u \subset \mathbb{R}_3[X]. \text{ Non surjective.}$$

Par contre, $\dim \ker u = 4 - 4 = 0$, donc u est injective. Par rang de la matrice, on trouve également $\text{Im } u = \mathbb{R}_3[X]$

- d) Matrice dans la base canonique $(1, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^n \end{pmatrix}$$

On a $\ker u = \{0\}$ (le polynôme nul est le seul polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ qui s'annule en $n+1$ racines.)

Donc u est injective. C'est une AL en dimension finie avec deux espaces de même dimension, elle est donc bijective. C'est un isomorphisme.

- e) pas de matrice possible car on n'est pas en dimension finie. On a $\ker u = \{\text{fonctions constantes}\}$ et $\text{Im } u = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. C'est un endomorphisme surjectif, mais non injectif.

Exercice 6

1. Montrons que la famille $\{x, \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est libre :

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 x + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-1}(x) = 0$. Alors, comme φ est linéaire :

$$\varphi^{n-1}(\lambda_0 x + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-1}(x)) = 0.$$

Mais comme de plus $\varphi^n = 0$, on a donc

$$\varphi^{n-1}(\lambda_0 x + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-1}(x)) = \varphi^{n-1}(\lambda_0 x) + \varphi^n(\lambda_1 x + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-2}(x)) = \lambda_0 \varphi^{n-1}(x).$$

Comme $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$ on obtient $\lambda_0 = 0$.

En calculant ensuite $\varphi^{n-2}(\lambda_1 \varphi(x) + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-1}(x))$ on obtient $\lambda_1 = 0$ puis, de proche en proche, $\lambda_{n-1} = \dots = \lambda_0 = 0$. La famille $\{x, \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est donc libre. Elle compte n vecteurs. Comme $\dim(E) = n$ elle est libre maximale et forme donc une base de E .

2. Dans la base $\mathcal{B} = (x, \varphi(x), \dots, \varphi^{n-1}(x))$, la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

- Comment est définie ϕ à partir de la définition sur les éléments de la base ? Pour $x \in E$ alors x s'écrit dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Et ϕ est définie sur E par la formule

$$\phi(x) = \alpha_1 \phi(e_1) + \alpha_2 \phi(e_2) + \alpha_3 \phi(e_3).$$

Soit ici :

$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) + \lambda \alpha_3 e_3.$$

Cette définition rend automatiquement ϕ linéaire (vérifiez-le si vous n'êtes pas convaincus!).

2. • Condition pour que φ soit surjective :

φ est surjective ssi $\text{rg} \varphi = \text{rg} M(\varphi) = 3$. Or, la matrice de φ dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rg} = 3$ ssi $\boxed{\lambda \neq 0}$.

• Condition pour que φ soit injective :

φ Comme c'est un endomorphisme, φ est injective ssi elle est surjective. C'est donc la même condition.

Exercice 8

$$1. \quad M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ker f = \{0\}; \mathfrak{Im}(f) = \text{Vect}((1, 2, 0); (0, 1, 1))$$

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \ker f = \text{Vect}\{(1, 2, -1)\}; \mathfrak{Im}(f) = \text{Vect}((1, 5); (1, 1))$$

$$2. \quad M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{rg}(g \circ f) = 2. \text{ C'est un automorphisme}$$

3. • Méthode 1 :

$$M(f \circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ D'où } \ker(f \circ g) = \text{Vect}(1, 2, -1). \text{ Non injective et donc non bijective.}$$

• Méthode 2 :

On sait déjà que $g((1, 2, -1)) = 0$, alors $f \circ g((1, 2, -1)) = 0$, d'où $\ker(f \circ g) \neq \{0\}$. D'où $f \circ g$ non injective.

Exercice 9

$$\ker \varphi = \{x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{2x} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 10

1. Oui, écrire la matrice.
2. a) $\ker u = \{(x, y) \mid 2x = y\} = \text{Vect}\{(1, 2)\}$ (résolution de système).
b) Par le théorème du rang, $\text{rg} u = 2 - 1 = 1$.
c) Non, car $\text{rg} u \neq \dim \mathbb{R}^2$.
d) N'importe quel vecteur de $\text{Im } u$ convient comme base. Exemple $(2, 1)$.
3. Après calcul, on constate que $\mathfrak{Im } u \subset \ker u$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$u \circ u(x) = u\left(\underbrace{u(x)}_{\in \mathfrak{Im } u \subset \ker u}\right) = 0$$

Exercice 11

1. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda(z + a\bar{z}) + \mu(z' + a\bar{z}') = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$ -linéaire.

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \text{Ker } f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ , $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\text{Ker } f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\text{Im } f = \mathbb{C}$. **2ème cas.** Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha + \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\text{Ker } f = \text{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, $\text{Im } f$ est une droite vectorielle et pour déterminer $\text{Im } f$, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1 + a$. Donc, si $a \neq -1$, $\text{Im } f = \text{Vect}(1 + a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ et $\text{Im } f = i\mathbb{R}$.

Exercice 12

On a $f \circ (\frac{3}{2}Id - \frac{1}{2}f) = (\frac{3}{2}Id - \frac{1}{2}f) \circ f = Id$, d'où f inversible et

$$f^{-1} = \frac{3}{2}Id - \frac{1}{2}f$$

Exercice 13

2. • Noyau : $\ker U = \{0\}$

Soit $f \in \ker U$. Alors, par définition, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\int_0^x f(t)dt = 0$$

or cette expression est celle de la primitive évaluée en x de f qui s'annule en 0. Si la primitive de f est nulle sur $]0; +\infty[$, alors f est nulle sur $]0; +\infty[$. Par continuité, f est nulle partout.

- Image : l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ des fonctions $\mathcal{C}^1(]0; +\infty[)$ t.q. $\lim_{x \rightarrow 0} xG'(x) = 0$.

★ Analyse :

Supposons que $G \in \mathfrak{Im} u$. Alors il existe $f \in E$ tel que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt. \\ \text{et } G(0) = f(0). \end{cases}$$

Autrement dit,

- G est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
- pour $x \neq 0$, $xG(x) = \int_0^x f(t)dt$ d'où

$$f(x) = (xG(x))' = G(x) + xG'(x).$$

- Comme f et G sont continues en 0, avec $G(0) = f(0)$, par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus, on a également

$$\lim_{x \rightarrow 0} xG'(x) = 0.$$

Tout ceci nous indique au passage que

$$\boxed{\text{Im } u \subset D}$$

★ Synthèse :

$$\text{Soit } G \in D. \text{ On pose } f(x) = \begin{cases} (xG(x))' = G(x) + xG'(x) & \text{si } x \neq 0 \\ G(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrons que $f \in \mathcal{C}^0$:

- f est clairement continue sur $]0; +\infty[$.
- En 0, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} G(x) + xG'(x) = G(0) = f(0)$ (continuité de G .)

On a donc $G = u(f)$, d'où $\text{Im } u \subset D$ et donc

$$\boxed{\text{Im } u = D}$$

3. Soit $\boxed{G(x) = \sqrt{x}}$ pour $x \in [0; +\infty[$. On a

$$G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{si } x > 0$$

d'où

$$xG'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

i.e.

$G \in \text{Im } u$ mais G' ne peut pas être continue en 0

Notons que, dans ce cas, si on note $u(f) = G$, on a

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \text{ pour } x \geq 0}$$

Exercice 14

1. a) $M(f)_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_3} = P_{\mathcal{B}'_2 \rightarrow \mathcal{B}_2} M(f)_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}$

$$\text{avec } P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}'_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } P_{\mathcal{B}'_2 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M(f)_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) $M(f)_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3} = P_{\mathcal{B}'_2 \rightarrow \mathcal{B}_2} M(f)_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3} P_{\mathcal{B}_3 \rightarrow \mathcal{B}'_3} = M(f)_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_3} P_{\mathcal{B}_3 \rightarrow \mathcal{B}'_3}$

$$\text{or, } P_{\mathcal{B}_3 \rightarrow \mathcal{B}'_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où}$$

$$M(f)_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- c) On a $\text{rg } f \leq \min(2, 3) = 2$ par construction. De plus, l'image de f contient au moins deux vecteurs non colinéaires (deux premiers vecteurs de la matrice non colinéaires). Aussi, $\text{rg } f \geq 2$ d'où

$$\text{rg } f = 2$$

et donc, par théorème du rang,

$$\dim \ker f = 3 - 2 = 1$$

or, on a vu, d'après la matrice, que $f((-1, -1, 1)_{\mathcal{B}_3}) = \vec{0}$, d'où

$$\ker f = \text{Vect}((-1, -1, 1)_{\mathcal{B}_3})$$

2. a) Avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(f)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) On a

$$M(f^n)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$M(f^n)_{\mathcal{B}} = PM(f^n)_{\mathcal{B}'}P^{-1} = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}$$

Exercice 15

1. Au vu des données, nous ne pouvons choisir que (à ordre près) : On note $\mathcal{G} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (2 + X, X^2 - X, X^2 + 1)$. On a alors

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{G}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La matrice de changement de base est

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad P_{\mathcal{G}, \mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, comme

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$M(u)_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = M(u)_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\boxed{u(a + bX + cX^2) = (a - b - c)(1 + X)}$$

Exercice 16

$$P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17

1. Dans la base canonique, la matrice de l'endomorphisme est triangulaire supérieure stricte. Sinon, on peut aussi invoquer le fait que si $\deg P \leq m$, alors

$$\deg \Delta(P) \leq m - 1$$

d'où, par itération,

$$\text{Im } \Delta^{n+1} = \{0\}$$

2. On a

$$\Delta^{n+1} = 0$$

autrement dit,

$$(T - Id)^{n+1} = 0$$

comme T et Id commutent, on trouve, par la formule du binôme,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{(-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k}}_{a_k} T^k = 0$$

Exercice 18

1. b) Soient $x, y \in E$ linéairement indépendants.

D'une part, $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$.

D'autre part, $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$

Ainsi, par unicité de la décomposition dans une base, on a

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$$

- c) Pour montrer que f est une homothétie, il faut montrer qu'il existe λ (constant !) tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \lambda x$$

Soit $x_0 \in E$ non nul. On pose $\lambda = \lambda_{x_0}$. On va montrer que pour tout $x \in E$, on a $\lambda_x = \lambda$.

★ Si x et x_0 sont linéairement indépendants, c'est fait (question précédente.)

★ Si x et x_0 sont colinéaires non nuls, comme x_0 est non nul, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = \alpha x_0$$

d'où

$$f(x) = \begin{cases} \alpha f(x_0) = \alpha \lambda x_0 \\ \lambda_x x = \lambda_x \alpha x_0 \end{cases}$$

Toujours parce que $x, x_0 \neq 0$, on obtient $\lambda_x = \lambda$.

★ Si $x = 0$, on a bien $f(x) = 0 = \lambda 0$.

★ Conclusion : on a bien $f(x) = \lambda x$.

2. Soit $\vec{x} \in E$,

- si x est nul, la famille $\{\vec{x}, f(\vec{x})\}$ est liée.
- sinon complétons $\{\vec{x}\}$ en $\{\vec{x}, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ une base de E et considérons l'application linéaire g telle que

$$g(\vec{x}) = \vec{x} \text{ et } g(\vec{e}_i) = -\vec{e}_i \text{ pour tout } i.$$

alors

$$\ker(g - Id) = Vect\{\vec{x}\}$$

et comme $g \circ f = f \circ g$, on a

$$f(x) \in \ker(g - Id) = Vect\{\vec{x}\}$$

donc $\{\vec{x}, f(\vec{x})\}$ est liée.

Remarque : en fait il suffit que f commute avec tout automorphisme de E . C'est la preuve ci-dessus puisque $g \in GL(E)$.