FEUILLE

10 – Familles de variables aléatoires finies ou discrètes

Lois conjointes et corrélation de Variables finies

Exercice 1: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Cours* – De l'expérience aux lois On jette un dé équlibré à 6 faces et on note X le nombre obtenu. Ensuite, on jette X fois une pièce de monnaie équilibrée et on note Y le nombre de "piles" obtenus.

1. Rappeler $E(X)$ et déterminer $E(X^2)$, $V(X)$.
2. Calculer la loi conjointe du vecteur (X, Y)
3. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$
4. Déterminer le coefficient de corrélation entre X et Y.

Exercice 2: [Indications] [Correction] – *Modéliser* – *Raisonner* – De l'expérience à la corrélation ☆

À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 3: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – sommes de variables ☆

Soit U, V deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$

1. Quelle est la loi de la somme de n variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$?
2. On pose $S = (U-1)^2 + (V-1)^2$. Déterminer la loi de S.
3. On pose $T = (U-1)(V-1) + 1$.
   a) Calculer $\mathbb{E}(S(T-1))$.
   b) Déterminer la loi de T.
   c) En déduire la covariance de (S, T)
4. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Lois conjointes et corrélation de Variables discrètes infinies

Exercice 4: [Indications] [Correction] – *Mobiliser* – Covariance par somme ☆

Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Poisson respectivement $\mathcal{P}(\lambda_1)$, $\mathcal{P}(\lambda_2)$, $\mathcal{P}(\lambda_3)$. On pose $S = X_1 + X_2$, $T = X_1 + X_3$.

1. Justifier l'existence et calculer $V(S), V(T)$ et $V(S+T)$.
2. En déduire l'existence et la valeur de $Cov(S, T)$.
3. Déterminer une autre façon (rapide) de calculer directement $Cov(S, T)$ sans passer par la question 1 et sans faire de gros calculs.
4. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 5: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – *Calculer* – ☆☆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et qui suivent toutes deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $U = |X - Y|$ (valeur absolue de $X - Y$) et $V = \min(X, Y)$.

1. a) Quelles sont les valeurs prises par U et V ?
   b) Déterminer la loi du couple (U, V).
2. a) Déterminer la loi de U et la loi de V.
   b) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 6: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Raisonner* – Lois marginales à partir de la loi conjointe Soit (X, Y) un couple de v.a.d. dont la loi est donnée par

$$P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} \qquad \forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

1. Déterminer la loi de X puis $\mathbb{E}[X]$ et $V(X)$.
2. Justifier sans calculs que X et Y suivent la même loi. En déduire $\mathbb{E}[Y]$ et $V(Y)$.
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
4. Calculer $V(4X - 5Y)$.
5. Quelle est l'espérance de $S = X + Y$?

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – ☆☆

Soient $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ un espace probabilisé sur lequel sont définies les variables aléatoires indépendantes X et Y, de même loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre p.

1. **a)** Calculer $P(Y = X)$.
b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(Y \geqslant k)$.
c) En déduire $P(Y \geqslant X)$.

2. Démontrer que $P(Y > X) = P(X > Y)$ et retrouver ainsi avec moins de calculs la probabilité $P(Y \geqslant X)$ grâce à $P(Y = X)$.

3. On définit les variables aléatoires U et V par : $U = \max(X, Y)$ $V = \min(X, Y)$.
a) Calculer pour tout $(u, v) \in \mathbb{N}^2$, la probabililté $P(U \leqslant u, V \geqslant v)$.
b) En déduire les lois des variables U et V.
c) Identifier la loi de la variable V.

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – ☆

Soient X et Y des $v.a.d.$ amettant chacune une variance telle que $V(X) = V(Y)$. Montrer que les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont non corrélées, c'est-à-dire que leur covariance est nulle.

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – ☆

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes et f, g deux fonctions réelles telles que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \qquad P(X = i, Y = j) = f(i)g(j)$$

où

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f(i) = \sum_{j=0}^{+\infty} f(j) = 1 \quad \text{et} \quad f(i), g(j) \geqslant 0 \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

1. **a)** Montrer que pour tout i,

$$P(X = i) = f(i) + P(X = i \cap Y \notin \mathbb{N})$$

b) En déduire que X et Y sont à valeurs entières, c'est-à-dire que

$$P(Y \notin \mathbb{N}) = P(X \notin \mathbb{N}) = 0$$

c) En déduire que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = f(i), \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \quad P(Y = j) = g(j)$$

2. Justifier que X et Y sont indépendantes.

3. *Application :* Soient $p \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires telles que

$$P(X = i, Y = j) = \binom{i}{n} p^{i+j}(1 - p)^{n-i+1} \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Déterminer la loi de X et celle de Y.

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – ☆☆

Soit $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ un espace probabilisé. Pour $A \subset \Omega$, on rappelle la notation de la fonction "indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$" :

$$\forall \omega, \qquad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est une variable aléatoire.

Soient (X, Y) un couple de $v.a.$ indicatrices sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ c'est à dire que $X = \mathbb{1}_A$ et $Y = \mathbb{1}_B$ où $A, B \in \mathcal{M}$.
Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées (i.e. $Cov(X, Y) = 0$.)

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – *Cours – Mobiliser* – ☆☆

Soient X et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.

1. Montrer que la covariance du couple (X, Y) est comprise entre $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

2. On suppose que la covariance du couple (X, Y) est nulle. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? *(On demande de se prononcer par oui ou non de manière certaine.)*

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – *Raisonner – Calculer* – ☆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que

$$p(X = -1) = p_1, \quad p(X = 1) = p_2 \qquad \text{où } p_1, p_2 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$\mathcal{L}(Y) = \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$$

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

2. On définit la variable aléatoire Z par : ☆

$$Z = \begin{cases} \theta_1 & \text{si } X + Y = 0 \\ \theta_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ_1, θ_2 sont des réels distincts fixés.
a) Montrer que la loi de Z est indépendante de p_1 et p_2.
b) Déterminer les valeurs de θ_1 et θ_2 de sorte que $\mathbb{E}[Z] = 3$ et $V(Z) = 2$

Lois conditionnelles

Exercice 13: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Cours* – Lois marginales à partir de la loi conjointe ☆

Soient a et b deux nombres entiers tels que $0 < a < b$ et $\lambda > 0$. On considère un vecteur aléatoire (X, Y) dont la loi de probabilité est définie par :

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \quad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} e^{-b\lambda}\dfrac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{i}a^i(b-a)^{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

1. Déterminer la loi marginale de Y. Donner $E(Y)$, $Var(Y)$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = j$.
3. Déterminer la loi marginale de X.

Exercice 14: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Calculer* – ☆

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. indépendantes telles que

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \qquad Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$$

Donner la loi conditionnelle de X sachant que $X + Y = n$.

Exercice 15: [Indications] [Correction] – *Calculer* – ☆☆

De l'autre côté du mirroir, les lapins sont blancs ou roses. La probabilité pour qu'un lapin soit rose est $p = 0,1$.
Alice rencontre sept lapins au hasard de sa promenade aléatoire. On note R le nombre de lapins roses.
Alice place ces sept lapins dans un chapeau, puis en prend deux au hasard. On note Y le nombre de lapins roses parmi ces deux lapins.

1. Établir la loi conditionnelles de $Y_{/(R=x)}$ pour toutes les valeurs de R.
2. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 16: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Raisonner* – *Modéliser* – ☆

Le nombre de blessés à l'oeil par un bouchon de champagne arrivant aux urgences ophtalmologiques la nuit de la Saint Sylvestre suit une loi de Poisson de moyenne 6. *(Données non constractuelles...)* Sachant que la probabilité d'atteindre un homme ou une femme est la même, on note X le nombre de femmes qui figurent parmi les éborgnés du jour de l'an et Y le nombre d'hommes.

1. Établir la loi de $X_{/(X+Y=n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
2. En déduire la loi de X et de Y. On précisera leur espérance et leur variance.
3. Montrer que X et Y sont indépendantes. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 17: [Indications] [Correction] – *Calculer* – ☆☆☆

1. *Question préliminaire :* Montrer que ☆☆☆

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Soit X une v.a.d. suivant une loi géométrique de paramètre p. Soit Y telle que la loi de Y sachant $X = k$ soit une loi $\mathcal{B}(k, p)$.
Déterminer la loi de Y. ☆☆

Sommes et manipulations de v.a.d.

Exercice 18: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Raisonner* – ☆

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant toutes trois la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Calculer $P(X = Y)$.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Calculer $P(X + Y = Z)$.

Exercice 19: [Indications] [Correction] – *Calculer* – ☆☆

Soient X, Y deux v.a.d. de loi géométrique indépendantes de paramètres respectifs p_1, p_2. Soit $Z = X - Y$. Donner l'espérance de Z ainsi que sa loi.

Exercice 20: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – ☆

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0, 1[$.

On pose $D = \begin{cases} Y - X & \text{si } Y > X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Donner la loi de D.
2. Montrer que D admet une espérance et donner sa valeur en fonction de p.

Exercice 21: [Indications] [Correction] – *Raisonner* – ☆☆

Soient $p, q \in]0; 1[$, et X, Y deux v.a. indépendantes telles que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(q)$.

1. On pose $Z = XY$. Calculer $\mathbb{E}[Z]$.
2. On pose $W = X + Y$.
   a) Déterminer la loi de W.
   b) Déterminer $\mathbb{E}[W]$.
   c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que W suive une loi binomiale. Dans ce cas, donner les paramètres de la loi.

EXERCICE 22: [Indications] [Correction] *– Modéliser – Calculer –* ☆

Le poinçonneur des lilas perfore en moyenne un ticket de première classe pour neuf de deuxième classe.

Indépendamment de ceci, le nombre de faux tickets qu'il reconnaît dans une journée suit une loi de Poisson de moyenne 3. Il les glisse dans sa poche (sans les poinconner) en refusant le passage au fraudeur.

En quittant son service, il vide sa poche. Quatre confetti qu'y sont glissés par hasard.

Calculer la probabilité pour que le nombre de confetti de deuxième classe qu'il y trouve soit strictement supérieur au nombre de faux tickets.

(On rappelle que lorsqu'un ticket était poinçonné, la pince produisait un confetti.)

EXERCICE 23: [Indications] [Correction] *– Raisonner – Calculer –* ☆☆

Soient $X_1, \dots, X_k, \dots$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires de Bernoulli précédentes suivant une loi de Poisson de paramètre entier $n \geq 1$. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $S_k = X_1 + \dots + X_k$. On définit de plus $S_0 = 0$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire S_N.

2. Vérifier que $E(S_N - S_n) = 0$.

Indications

Exercice 2 [Correction]

1. Se poser la question de savoir si on suit un modèle connu.

2. Trouver une relation entre X_1, X_2 et X_3.

Exercice 3 [Correction]

2. On pourra observer que $(U-1)^2$ et $(V-1)^2$ suivent deux loi de Bernoulli indépendantes de même paramètre. En déduire la loi de S.

Exercice 4 [Correction]

3. La covariance est bilinéaire...

Exercice 5 [Correction]

1. b) Distinguer les cas $m = 0$ et les autres. De plus, penser à exprimer les événements grâce à X et Y séparément.

Exercice 6 [Correction]

4. Utiliser la question précédente.

Exercice 7 [Correction]

1. a) Penser à un système complet (ou quasi complet) pertinent.

c) Là aussi, penser à un (voir deux) système(s) complet(s) pertinent(s)

Exercice 8 [Correction]

La covariance est bilinéaires...

Exercice 10 [Correction]

Pour $\Leftarrow$ Commencer par montrer que $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont des événements indépendants et en déduire l'indépendance de X et Y.

Exercice 11 [Correction]

1. Se souvenir que $|r(X, Y)| \leqslant 1$.

2. On pourra par exemple se ramener à l'exemple précédent.

Exercice 15 [Correction]

1. Chercher une loi connue !

Exercice 16 [Correction]

1. Chercher une loi connue.

Exercice 17 [Correction]

1. On pensera à la récurrence

Exercice 1

1. On pose $n=6$.

- $E(X)=\dfrac{n+1}{2}$
- $E(X^2)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{7\times 13}{6}$
- $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}=\dfrac{35}{12}$

2.
- Support de X : $\{1,\dots,6\}$.
- Support de Y : $\{0,\dots,6\}$.
- Valeur de $P(X=k,Y=j)$:

. On note que $Y\leqslant X$ par construction. Ainsi, si $(k,l)\notin\{1,\dots,6\}\times\{0,\dots,6\}$ ou $k<j$, on a

$$P(X=k,Y=j)=0$$

. On suppose $(k,l)\in\{1,\dots,6\}\times\{0,\dots,6\}$ et $k\geqslant j$.
On a

$$P(X=k,Y=j)=P_{X=k}(Y=j)P(X=k)$$

Or, X admet une loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$ et la loi de Y sachant $(X=k)$ est $\mathcal{B}(p,k)$, avec $p=\frac{1}{2}$. d'où

$$P(X=k,Y=j)=\frac{1}{6}\binom{j}{k}p^k$$

. Conclusion :

$$P(X=k,Y=j)=\begin{cases}0 & \text{si } (k,l)\notin\{1,\dots,6\}\times\{0,\dots,6\}\ \textit{ou}\ k<j\\ \frac{1}{6}\binom{j}{k}p^k & \text{sinon}\end{cases}$$

3. On connait la loi de X et la loi de Y sachant X. Il suffit donc de connaître l'espérance et la variance de ces deux lois pour répondre à la question.

- Espérance :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=0}^{6} jP(Y=j)\\
&= \sum_{j=0}^{6} j\sum_{k=1}^{6} P_{X=k}(Y=j)P(X=k) \quad \text{(formule des proba totales)}\\
&= \sum_{k=1}^{6}\sum_{j=0}^{6} jP_{X=k}(Y=j)P(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{6} P(X=k)\underbrace{\sum_{j=0}^{6} jP_{X=k}(Y=j)}_{\text{espérance de }\mathcal{B}(p,k)}\\
&= \sum_{k=1}^{6} P(X=k)pk\\
&= p\underbrace{\sum_{k=1}^{6} P(X=k)k}_{\text{espérance de }X} = 7/4
\end{aligned}$$

- Variance :

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \sum_{j=0}^{6} j^2P(Y=j)\\
&= \sum_{j=0}^{6} j^2\sum_{k=1}^{6} P_{X=k}(Y=j)P(X=k) \quad \text{(formule des proba totales)}\\
&= \sum_{k=1}^{6}\sum_{j=0}^{6} j^2P_{X=k}(Y=j)P(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{6} P(X=k)\underbrace{\sum_{j=0}^{6} j^2P_{X=k}(Y=j)}_{E((Y_{/(X=k)})^2)}
\end{aligned}$$

Or, $Y_{/(X=k)}$ suit une loi $\mathcal{B}(k,p)$, ainsi,

$$E((Y_{/(X=k)})^2) = V(Y_{/(X=k)}) + E(Y_{/(X=k)})^2 = kpq + (kp)^2 = p^2(k+k^2)$$

d'où

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{k=1}^{6} P(X=k)p^2(k+k^2) \\ &= p^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{6} kP(X=k)}_{E(X)} + p^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{6} k^2 P(X=k)}_{E(X^2)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{7}{2} + \frac{7\times 13}{6}\right) = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$$E(Y^2) = \frac{14}{3}$$

Ainsi,

$$V(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{14}{3} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{77}{48} \simeq 1,60$$

$$\boxed{V(Y) = \tfrac{77}{48} \simeq 1,60}$$

4. • $E(XY)$:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{k=1}^{6}\sum_{j=0}^{6} kjP(X=k, Y=j) \\ &= \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) \underbrace{\sum_{j=0}^{6} jP_{X=k}(Y=j)}_{\text{espérance de } \mathcal{B}(p,k)} \\ &= \sum_{k=1}^{6} kP(X=k)pk \\ &= p\underbrace{\sum_{k=1}^{6} k^2 P(X=k)}_{E(X^2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{7\times 13}{6} = \frac{91}{12} \end{aligned}$$

• $\mathrm{Cov}(X,Y)$:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{91}{12} - \frac{7}{2}\times\frac{7}{4} = \frac{35}{24}$$

• $r(X,Y)$:

$$r(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\frac{35}{24}}{\sqrt{\frac{35}{12}}\sqrt{\frac{77}{48}}} \simeq 0,674$$

Exercice 2

1. Chacune des n voitures a la probabilité $p = \frac{1}{3}$ de choisir le premier péage. Dès lors, la variable aléatoire X_1 peut se comprendre comme étant le nombre de succès dans une série de n épreuves indépendantes ayant chacune la probabilité p de réussir. La variable X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n$et $p = \frac{1}{3}$
2. Par le cours,

$$\boxed{V(X_1) = np(1-p) = \frac{2n}{9}}$$

et

$$\boxed{V(X_2) = \frac{2n}{9}}$$

car X_1, X_2, X_3 suivent les mêmes lois.
Puisque $X_1 + X_2 = n - X_3$, on obtient

$$\boxed{V(X_1 + X_2) = V(n - X_3) = V(X_3) = \frac{2n}{9}}$$

3. Sachant

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + 2Cov(X_1, X_2) + V(X_2)$$

on obtient

$$\boxed{Cov(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}.}$$

Exercice 3

1. Cette somme est le nombre de succès (de probabilité p) dans une série de n épreuves identiques et indépendantes. Ainsi, elle suite une loi

$$\boxed{\mathcal{B}(n,p)}$$

2. Comme $Supp(U) = \{0, 1, 2\}$, on a

$$Supp(U - 1) = \{-1, 0, 1\}$$

et donc

$$Supp((U - 1)^2) = \{0, 1\}$$

Autrement dit, $(U - 1)^2$ suit une loi de Bernoulli.
Or, $P((U - 1)2 = 1) = P(U = 1) = \binom{2}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. D'où

$$(U - 1)^2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$$

De même pour $(V - 1)^2$.
Ainsi, par indépendance de U et V, d'après la question précédente, on a

$$\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)}$$

3. a) On a

$$S(T - 1) = \left((U - 1)^2 + (V - 1)^2\right)(U - 1)(V - 1) = (U - 1)^3(V - 1) - (V - 1)^3(U - 1)$$

Ainsi, comme les variables sont finies, toutes les espérances existent ici et

$$\mathbb{E}[S(T - 1)] = \mathbb{E}\left((U - 1)^3(V - 1)\right) - \mathbb{E}\left((V - 1)^3(U - 1)\right)$$

mais comme U et V ont même loi, les variables $(U - 1)^3(V - 1)$ et $(V - 1)^3(U - 1)$ sont également de même loi. Ainsi, leur espérance est la même et on obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(S(T - 1)) = 0}$$

b) On a

$$Supp(U - 1) = Supp(V - 1) = \{-1, 0, 1\}$$

d'où

$$Supp((U - 1)(V - 1)) = \{-1, 0, 1\}$$

et donc

$$Supp(T) = \{0, 1, 2\}.$$

On a

$$P(T = 0) = P(U = 0, V = 2) + P(U = 2, V = 0) = \frac{1}{8}$$

et

$$P(T = 2) = P(U = 0, V = 0) + P(U = 2, V = 2) = \frac{1}{8}.$$

On en tire

$$P(T = 1) = \frac{3}{4}$$

Pour résumer :

k	0	1	2
$P(T = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

c) Par la formule de Huygens,

$$Cov(S,T) = \mathbb{E}(ST) - \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(S(T-1)) + \mathbb{E}(S) - \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(T)$$

Or on a déjà calculé

$$\mathbb{E}(S(T-1)) = 0.$$

Par loi binomiale, on sait que

$$\mathbb{E}(S) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

puis par calcul direct sur la loi de T, on obtient

$$\mathbb{E}[T] = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{8} = 1$$

ou alors par linéarité et indépendance de U, V :

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[U-1]\mathbb{E}[V-1] + 1 = (\mathbb{E}[U]-1)^2 + 1 = (1-1)^2 + 1 = 1$$

D'où finalement

$$\boxed{Cov(S,T) = 0}$$

4. La covariance nulle ne suffit pas à affirmer l'indépendance de S et T. Étudions l'événement $(S=0, T=0)$:

L'événement $(S=0)$ correspond à $(U=1, V=1)$ alors que $(T=0)$ correspond à $(U=0, V=2) \cup (U=2, V=0)$.
Ceux-ci sont incompatibles et donc

$$P(S=0, T=0) = 0 \neq P(S=0)P(T=0).$$

$\boxed{\text{Les variables } S \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

Exercice 4

1. $V(S+T) = V(2X_1 + X_2 + X_3)$. Par indépendance des variables X_1, X_2, X_3, on a

$$V(S) = V(X_2) + V(X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$$

de même,

$$V(T) = \lambda_1 + \lambda_3$$

et

$$V(S+T) = 4V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

2. On a

$$V(S+T) = V(S) + V(T) + 2Cov(S,T)$$

d'où

$$\begin{aligned} Cov(S,T) &= \frac{1}{2}(V(S+T) - V(S) - V(T)) \\ &= \frac{1}{2}(4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_3)) \\ &= \lambda_1 \end{aligned}$$

3. $Cov(S,S) = Cov(X_1 + X_2, X_1 + X_3) = Cov(X_1, X_1) + Cov(X_1, X_3) + Cov(X_2, X_1) + Cov(X_2, X_3) = V(X_1)$ D'où

$$\boxed{Cov(S,T) = \lambda_1}$$

4. Non, sinon on aurait $Cov(S,T) = 0$.

Exercice 5

1. a) U prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et V dans $\mathbb{N}^*$.

b) On a $P[(U=m) \cap (V=n)] = P(|X-Y| = m, \min(X,Y) = n)$.

- $\star$ Si $m = 0$,

par indépendance des variables X et Y :

$$\boxed{P[(U=0) \cap (V=n)] = P[(X=n) \cap (Y=n)] = p^2 q^{2n-2}}$$

- $\star$ Si $m \in \mathbb{N}^*$,

$$P[(U=m) \cap (V=n)] = P[(X=m+n) \cap (Y=n)] + P[(X=n) \cap (Y=m+n)]$$

et, par équiprobabilité de ces deux événements et indépendance de X et Y :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P[(U=m) \cap (V=n)] = 2q^2 p^{m+2n-2}}$$

2. a) $\star$ $P(U=0) = \sum_{n=1}^{\infty} P[(U=0) \cap (V=n)] = \sum_{n=1}^{\infty} p^2 (q^2)^{n-1} = \frac{q^2}{1-p^2}$:

$$P(U=0) = \frac{q}{1+p}$$

$\star$ Pour $m > 0$, $P(U=m) = \sum_{n=1}^{\infty} 2q^2 p^m (p^2)^{n-1} = \frac{2qp^m}{1+m}$

$\star$ La loi de V est donnée par : $\forall n \geq 1$,

$P(V=n) = \sum_{m=0}^{\infty} P[(U=m) \cap (V=n)] = q^2 p^{2n-2} + \sum_{m=1}^{\infty} 2q^2 p^{2n-1} p^{m-1}$

Soit :

$$P(V=n) = q^2 p^{2n-2} + 2qp^{2n-1} = (1+p)qp^{2n-2}$$

b) $P[(U=m)\cap(V=n)] = P(U=m)P(V=n)$. Les variables U et V sont donc indépendantes.

Exercice 6

1. $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$. D'où $\mathbb{E}[X]=2$ et $V(X) = \dfrac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2$.
2. La loi du couple est symétrique. $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[X]=2$. De même pour la variance.
3. $P(X=i\cap Y=j) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i+j} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j} = P(X=i)P(Y=j) \quad \forall i,j \in \mathbb{N}^*$
   Les variables sont indépendantes.
4. Les variables sont indépendantes, ainsi $V(4X-5Y) = 4^2V(X)+(-5)^2V(Y) = (16+25)V(X) = 82$.
5. $Supp(S) = \mathbb{N}^* - \{1\}$.

   Soit $k \geqslant 2$.
$$P(S=k) = \alpha\frac{k+1}{2^k} = \frac{k+1}{2^k}$$
   et, par linéarité de l'espérance, comme celle de X et Y existent (c'est la même, elle vaut 2), on a
$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y] = 4$$

Exercice 7

1. a) On note $q=1-p$. La famille $\{X=k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet. Ainsi,
$$\begin{aligned}
P(Y=X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=X=k)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k, X=k)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k)P(X=k) \quad \text{par indépendance}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (pq^k)^2\\
&= p^2\sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k\\
&= p^2\frac{1}{1-q^2}\\
&= p^2\frac{1}{(1-q)(1+q)} = p^2\frac{1}{p(1+q)}
\end{aligned}$$
   D'où
$$\boxed{P(Y=X) = \frac{p}{2-p}.}$$

b) On peut faire le calcul par $P(Y \geqslant k) = \sum_{j=k}^{+\infty} P(Y = j)$ mais on peut également passer par la fonction de répartition de $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ qui est connue.

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant k) &= 1 - P(Y < k) \\ &= 1 - P(Y \leq k - 1) \\ &= 1 - P(Y + 1 \leq k) \end{aligned}$$

et comme on connait la fonction de répartition de $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on sait alors que

$$P(Y \geqslant k) = 1 - (1 - q^k) = q^k$$

Ou sinon, on peut penser ça en fonction de la modélisation en nombre d'échecs Y :

$$(Y \geqslant k) = \text{"on a au moins } k \text{ échecs"}$$

Bref, en conclusion, on a

$$\boxed{P(Y \geqslant k) = (1 - p)^k}$$

c) La famille $\{X = k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y \geqslant k, X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y \geqslant k) P(X = k) \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p q^k = p \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \\ &= p \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = p \frac{1}{1 - q^2} \\ &= p \frac{1}{(1 - q)(1 + q)} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{P(Y \geqslant X) = \frac{1}{2 - p}.}$$

2. La loi du couple (X, Y) est symétrique en X et Y car les variables sont indépendantes. Ainsi,

$$P(Y > X) = P(X > Y)$$

On a

$$\begin{aligned} P(X \geqslant Y) &= P(X > Y) + P(X = Y) \\ &= P(Y < X) + P(X = Y) \end{aligned}$$

en faisant la somme des deux lignes, on trouve

$$2P(Y \geqslant X) = P(X > Y) + P(Y < X) + P(X = Y) + P(X = Y)$$

Or, le système $(X > Y), (Y > X), (X = Y)$ est complet. On a donc

$$1 = P(Y > X) + P(X > Y) + P(X = Y)$$

D'où

$$2P(Y \geqslant X) = 1 + P(X = Y) = 1 + \frac{p}{1 + q} \cdot = \frac{1 + \overbrace{q + p}^{1}}{1 + q}$$

on en déduit

$$P(Y \geqslant X) = \frac{1}{1 + q}$$

3. a) $P(U \leqslant u, V \geqslant v) = P(v \leqslant X \leqslant u)^2 = \begin{cases} [q^v - q^{u+1}]^2 & \text{si } 0 \leqslant v \leqslant u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) $P(U = u) = p[2q^u - q^{2u}(1 + q)]^2$ et $P(V = v) = q^{2v}[1 - q^2]$.

c) Ainsi V suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $1 - q^2$.

Exercice 8

Les moments d'ordre 2 de X et X existent, donc on peut appliquer la formule de bilinéarité de la covariance :

$$\begin{aligned} Cov(X + Y, X - Y) &= Cov(X, X - Y) + Cov(Y, X - Y) \\ &= Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(Y, X) - Cov(Y, Y) \\ &= V(X) - V(Y) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 9

1. a) Considérons la famille $\{(Y=j)\}_{j\in\mathbb{N}} \cup \{A\}$ où $A=(Y\notin\mathbb{N})$. C'est un système complet et ainsi, par σ-additivité :

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= P(X=i\cap Y\notin\mathbb{N}) + \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=i,Y=j)\\
&= P(X=i\cap Y\notin\mathbb{N}) + \sum_{j=0}^{+\infty} f(i)g(j)\\
&= P(X=i\cap Y\notin\mathbb{N}) + f(i)\underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} g(j)}_{=1}\\
&= P(X=i\cap Y\notin\mathbb{N}) + f(i)
\end{aligned}$$

b) On fait cette fois ci une somme sur le système complet $\{(X=i)\}_{j\in\mathbb{N}} \cup \{B\}$ où $B=(X\notin\mathbb{N})$., d'où

$$\begin{aligned}
1 &= P(B) + \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i)\\
&= P(B) + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(P(X=i\cap Y\notin\mathbb{N}) + f(i)\right)\\
&= P(B) + \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i\cap Y\notin\mathbb{N}) + \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)
\end{aligned}$$

car en effet, toutes les séries sont convergentes, soit par hypothèse, soit par σ-additivité. D'où

$$1 = P(X\notin\mathbb{N}) + P(Y\notin\mathbb{N}) + 1$$

et donc

$$P(X\notin\mathbb{N}) + P(Y\notin\mathbb{N}) = 0$$

Or, ce sont deux nombres positifis, donc ils sont chacun nuls, i.e.

$$\boxed{P(Y\notin\mathbb{N}) = P(X\notin\mathbb{N}) = 0}$$

c) Comme $P(A)=P(B)=0$, on a alors

$$P(X=i\cap Y\notin\mathbb{N}) \quad \forall i\in\mathbb{N}$$

et donc, d'après 1a,

$$P(X=i)=f(i) \quad \forall i\in\mathbb{N}$$

Le problème est symétrique en Y et $g(j)$.

2. D'après la question précédente, on a $P(X=i)=f(i)$ et $P(Y=j)=g(j)$ pour tous $i,j\in\mathbb{N}$
D'où

$$P(X=i,Y=j) = P(X=i)P(Y=j) \qquad \forall i,j\in\mathbb{N}$$

les variables sont indépendantes.

3. On pose ici $f(i)=\binom{i}{n}p^i(1-p)^{n-i}$ et $g(j)=p^j(1-p)$. On est dans la situation de la question précédente, où l'on reconnait

$$\boxed{X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p) \qquad Y\hookrightarrow\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)}$$

Exercice 10

On constate que $Supp(X) = Supp(Y) = \{0, 1\}$.

Ainsi, on a d'une part, par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{i,j\in\{0,1\}} ijP(X = i, Y = j) = P(X = 1, = 1)$$

et d'autre, part,

$$\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = P(X = 1)P(Y = 1)$$

- Supposons que X et Y sont non corrélées.

Alors $\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = Cov(X, Y) = 0$, d'où

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

d'où, d'après les égalités citées plus haut,

$$P(X = 1, = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$$

Aussi, les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont indépendants. On sait alors que $(X = 0) = \overline{(X = 1)}$ est indépendant de $Y = 1$, puis, de même, $(X = 0)$ indépendant de $(Y = 0)$ et $(X = 1)$ indépendant de $(Y = 0)$. Autrement dit, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- Supposons que X et Y soient indépendantes.

Alors, en particulier,

$$P(X = 1, = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$$

puis

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]E[Y]$$

c'est-à-dire que les variables sont non correlées.

Exercice 11

1. Le fait que $|r(X, Y)| \leqslant 1$ signifie que

$$\text{Cov}^2(X, Y) \leqslant V(X)V(Y)$$

Or,

$$V(X) = p_1(1 - p_1), \quad V(Y) = p_2(1 - p_2)$$

Avec une étude de la fonction $p \mapsto p(1 - p)$ sur $[0, 1]$, on peut observer que

$$p(1 - p) \leqslant \frac{1}{4} \quad \forall p \in [0, 1]$$

D'où

$$\text{Cov}^2(X, Y) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

ce qui répond à la question.

2. $X = \mathbb{1}_{X=1}$ et $Y = \mathbb{1}_{Y=1}$. On obtient que X et Y sont indépendantes.

Attention, on rappelle que ce résultat n'est pas vrai en général, pour des variables aléatoires quelconques.

Exercice 12

1. Immédiatement, on a

$$Supp(X + Y) = [\![-2, 2]\!]$$

et en faisant rapidement un petit tableau de probabilités croisés, on obtient la loi de Z :

Valeurs de $P(X = k, Y = j) = P(X = k)P(Y = j)$:

$X =$	-1	0	1
$Y = -1$	$\frac{p_1}{3}$ $(X + Y = -2)$	$\frac{1-p_1-p_2}{3}$ $(X + Y = -1)$	$\frac{p_2}{3}$ $(X + Y = 0)$
$Y = 0$	$\frac{p_1}{3}$ $(X + Y = -1)$	$\frac{1-p_1-p_2}{3}$ $(X + Y = 0)$	$\frac{p_2}{3}$ $(X + Y = 1)$
$Y = 1$	$\frac{p_1}{3}$ $(X + Y = 0)$	$\frac{1-p_1-p_2}{3}$ $(X + Y = 1)$	$\frac{p_2}{3}$ $(X + Y = 2)$

d'où

k	-2	-1	0	1	2
$P(S = k)$	$\frac{p_1}{3}$	$\frac{1-p_2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1-p_1}{3}$	$\frac{p_2}{3}$

2. a) $P(Z = \theta_1) = P(X+Y = 0) = \frac{1}{3}$, d'où le tableau de probabilités suivant :

Loi de Z :

k	θ_1	θ_2
$P(Z = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

b) Le calcul donne

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{\theta_1 + 2\theta_2}{3} \qquad \mathbb{E}[Z^2] = \frac{\theta_1^2 + 2\theta_2^2}{3}$$

et les données de l'énoncé $\mathbb{E}[Z] = 3$ et $\mathbb{E}[Z^2] = 11$ donnent

$$\boxed{(\theta_1, \theta_2) \in \{(5,2);(1,4)\}}$$

Exercice 13

1. Dans tous les cas, on note que $X \leqslant Y$.

• Loi de Y :

Soit $y \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
P(Y = y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = y, X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{y} P(Y = y, X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{y} e^{-b\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \binom{y}{k} a^k (b-a)^{y-k} \\
&= e^{-b\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \underbrace{\sum_{k=0}^{y} \binom{y}{k} a^k (b-a)^{y-k}}_{b^y} \\
&= e^{-b\lambda} \frac{(b\lambda)^y}{y!}
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{Y \to \mathcal{P}(b\lambda)}$

• Espérance et variance de Y : On sait que $\boxed{E(Y) = V(Y) = b\lambda}$

2. Soit $x \in \mathbb{N}$. On a

$$P_{Y=j}(X = x) = \frac{P(X = x, Y = j)}{P(Y = j)}$$

Si $x > y$, on obtient $P_{Y=j}(X = x) = 0$.
Si $x \leqslant y$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{P(X = x, Y = j)}{P(Y = j)} &= \frac{e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{x} a^x (b-a)^{j-x}}{e^{-b\lambda} \frac{(b\lambda)^j}{j!}} \\
&= \frac{\binom{j}{x} a^x (b-a)^j}{b^{j-x}} \\
&= \binom{j}{x} \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(1 - \frac{a}{b}\right)^j
\end{aligned}$$

Conclusion : X sachant $Y = j$ suit une loi $\boxed{\mathcal{B}\left(\frac{a}{b}, j\right).}$

3. Soit $x \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
P(X = x) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = k, Y = j) \\
&= \sum_{j=x}^{+\infty} e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{x} a^x (b-a)^{j-x} \\
&= e^{-b\lambda} a^x \sum_{j=x}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \frac{j!}{x!(j-x)!} (b-a)^{j-x} \\
&= e^{-b\lambda} \frac{a^x}{x!} \sum_{j=x}^{+\infty} \lambda^j \frac{1}{(j-x)!} (b-a)^{j-x} \\
&= e^{-b\lambda} \frac{a^x}{x!} \lambda^x \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} (b-a)^j}_{e^{\lambda(b-a)}} \\
&= e^{-b\lambda} \frac{a^x}{x!} \lambda^x e^{\lambda(b-a)} = \frac{(a\lambda)^x}{x!} e^{-a\lambda}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{X \to \mathcal{P}(a\lambda)}$$

Exercice 14

On sait que, comme X et Y sont indépendante, que

$$X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu).$$

De plus, comme Y est positive (ainsi que X), on a que

$$0 \leqslant X \leqslant X+Y$$

et donc

$$Supp(X_{/X+Y=n}) = [\![0,n]\!]$$

Soit donc $k \in [\![0,n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
P(X_{/X+Y=n}=k) &= P_{X+Y=n}(X=k) \\
&= \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\
&= \frac{\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}_{a}\right)^k\left(\underbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}_{1-a}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

On reconnait donc

$$\boxed{X_{/X+Y=n} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)}$$

Exercice 15

1. Tout d'abord, notons que • $Supp(R) = \{0,1,\dots,7\}$.

• $Supp(Y_{/(R=x)}) = \{0,\dots \min(2,x)\}$ et Alice effectue un tirage sans remise de 2 éléments dans une urne contenant x lapins roses sur un total de 7 individus. Il s'en suit donc immédiatement que $Y_{/(R=x)}$ suit une

$\boxed{\text{loi hypergéométrique de 2 tirages pour un nombre de cas favorables } x \text{ et 7 individus au total.}}$

On peut détailler :

$$P_{(R=x)}(Y=k) = \frac{\overbrace{\binom{x}{k}}^{\text{choix des lapins roses/}}\ \overbrace{\binom{7-x}{2-k}}^{\text{choix des lapins non roses}}}{\binom{7}{2}}$$

2. Tout d'abord, on a

$$Supp(Y) = \{0,1,2\}$$

Étant donné les lois conditionnelles précédentes, comme $\{(R=x)\}_{x=0,\dots,7}$ est un système complet d'événements, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=y) &= \sum_{x=0}^{7} P(Y=y, R=x) \\
&= \sum_{x=0}^{7} P(R=x)P_{R=x}(Y=0)
\end{aligned}$$

De plus,

$$R \hookrightarrow \mathcal{B}(7;0,1)$$

d'où, pour $y=0,1,2$:

$$P(Y=y) = \sum_{x=0}^{7}\binom{7}{x}p^x(1-p)^{7-x}\frac{\binom{x}{y}\binom{7-x}{2-y}}{\binom{7}{2}}$$

Pour simplifier les coefficients binomiaux, il faut distinguer les cas :
$\binom{x}{y}=0$ quand $x<y$, d'où une somme qui commence en fait à y.
$\binom{7-x}{2-y}=0$ quand $7-x<2-y$, i.e. $5+y<x$, d'où une somme qui se termine au maximum à $5+y$. Or

$$5+y \leqslant 7,$$

la somme ne va donc en réalité que de $x=y$ à $x=5+y$, avec

$$
\begin{aligned}
P(Y=y) &= \sum_{x=y}^{5+y} \frac{7!}{x!(7-x)!} p^x (1-p)^{7-x} \frac{\frac{x!}{y!(x-y)!}\frac{(7-x)!}{(2-y)!(7-x-2+y)!}}{\frac{7!}{5!2!}} \\
&= \frac{2!}{y!(2-y)!} \sum_{x=y}^{5+y} p^x (1-p)^{7-x} \frac{5!}{(x-y)!(5-(x-y))!}
\end{aligned}
$$

et par changement d'indice $i = x - y$:

$$
\begin{aligned}
P(Y=y) &= \tfrac{2!}{y!(2-y)!} \sum_{i=0}^{5} p^{i+y}(1-p)^{7-(i+y)} \tfrac{5!}{i!(5-i)!} \\
&= \tfrac{2!}{y!(2-y)!} p^y (1-p)^{2-y} \underbrace{\sum_{i=0}^{5} p^i (1-p)^{5-i} \frac{5!}{i!(5-i)!}}_{=p+1-p=1} \\
&= \tfrac{2!}{y!(2-y)!} p^y (1-p)^{2-y}
\end{aligned}
$$

D'où $\boxed{Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(2,p)}$

Exercice 16

1. Sachant qu'il y a n accidentés, l'énoncé nous dit que le bouchon n'a pas de préférence entre les hommes et les femmes, les blessés étant indépendants les uns des autres, on est en face de n répétitions d'une même expérience à deux issues dont le succès est "être une femme...", de probabilité $\frac{1}{2}$.
Autrement dit, on a
$$X_{/(X+Y=n)} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

2. On a a priori $Supp(X) = \mathbb{N}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n) P_{X+Y=n}(X=k) \\
&= e^{-6} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{6^n}{n!} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{e^{-6}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{3^n}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-6}}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{3^{j+k}}{j!} = 3^k \frac{e^{-6}}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{3^j}{j!} = 3^k \frac{e^{-3}}{k!}
\end{aligned}
$$

D'où $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(3).}$

X et Y suivent des lois symétriques, d'où
$$X, Y \hookrightarrow \mathcal{P}(3).$$
D'après le cours, on a
$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 3 \qquad V(X) = V(Y) = 3}$$

3. Soient $k, l \in \mathbb{N}$. On a

$$
\begin{aligned}
P(X=k, Y=l) &= P(X=k, X+Y=k+l) = P_{X+Y=k+l}(K=k) P(X+Y=k+l) \\
&= \binom{k+l}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l} e^{-6} \frac{6^{k+l}}{(k+l)!} \\
&= \frac{1}{k!l!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l} e^{-6} 6^{k+l} = P(X=k)P(Y=l) \\
&= \frac{1}{k!l!} e^{-6} 3^{k+l} = P(X=k)P(Y=l)
\end{aligned}
$$

X et Y sont donc indépendants :

C'est cohérent car les variables X et Y ne sont liées par aucune contrainte a priori dans le problème.

Exercice 17

1. Initialisation en $n = 0$: cours
Hérédité : on suppose que c'est vrai pour n. Montrons que c'est vrai pour $n+1$.
pose
$$T_N = \sum_{k=n}^{N} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$$
et
$$S_N = \sum_{k=n+1}^{N} k(k-1)\dots(k-(n+1)+1)x^{k-(n+1)}$$
On sait par récurrence que
$$T_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$
et on veut montrer que
$$S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$
On peut noter que
$$S_N = \sum_{k=n+1}^{N} k(k-1)\dots(k-n)x^{k-n-1}$$

on peut éventuellement faire un changement d'indice : $j = k-1$ afin de tenter de se ramener aux mêmes types de termes que dans T_N ou S_N :

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{k=n+1}^{N} k(k-1)\dots(k-n)x^{k-n-1} \\
&= \sum_{j=n}^{N-1}(j+1)j\dots(j-n+1)x^{j-n}
\end{aligned}$$

On observe que pour retrouver T_N, le terme $j+1$ est en trop, alors que pour retrouver une forme de type S_N, c'est le dernier terme du produit qui ne correspond pas. On propose donc de décomposer

$$j+1 = j+1-(n+1)+(n+1) = j-n+(n+1)$$

d'où

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{j=n}^{N-1} j\dots(j-n+1)(j-n)x^{j-n} + (n+1)\sum_{j=n}^{N-1} j\dots(j-n+1)x^{j-n} \\
&= xS_{N-1} + T_{N-1} \\
&= x(S_N - N\dots(N-n)x^{N-n}) + (n+1)T_{N-1}
\end{aligned}$$

D'où

$$(1-x)S_N = (n+1)\underbrace{T_{N-1}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}} - x\underbrace{N\dots(N-n)x^{N-n}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \text{ car } |x|<1 \text{ (CC)}}$$

Comme $x \neq 1$, on en déduit que

$$S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

2. • D'après l'énoncé, $Supp(Y) = \mathbb{N}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P(Y=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=n, X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\underbrace{P_{X=k}(Y=n)}_{=0 \text{ si } n>k}
\end{aligned}$$

⋆ Si $n=0$, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P_{X=k}(Y=0) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p\binom{k}{0}p^0q^{k-0} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pq^k = p\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} \\
&= pq\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} \\
&= pq\frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

⋆ Si $n \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k)P_{X=k}(Y=n) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} q^{k-1}p\binom{k}{n}p^nq^{k-n} \\
&= \frac{p^{n+1}}{n!}\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)q^{2k-n-1}
\end{aligned}$$

Or, on rappelle que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

D'où, pour $x=q^2$, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)q^{2k-2n} = \frac{n!}{(1-q^2)^{n+1}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(Y=n) &= \frac{p^{n+1}}{n!}\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)q^{2k-n-1}\\
&= \frac{p^{n+1}}{n!}\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)q^{2k-2n}q^{n-1}\\
&= \frac{p^{n+1}q^{n-1}}{n!}\frac{n!}{(1-q^2)^{n+1}}\\
&= \frac{p^{n+1}q^{n-1}}{p^{n+1}(1+q)^{n+1}}\\
&= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}}
\end{aligned}$$

• Conclusion : $\boxed{P(X=n)=\begin{cases}\dfrac{q}{1+q} & \text{si } n=0\\ \dfrac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} & \text{si } n\in\mathbb{N}^*\end{cases}}$

Exercice 18

1. $P(X=Y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(X=Y=k)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k).P(Y=k)=\frac{1}{n}$

2. La variable $X+Y$ prend ses valeurs entre 2 et $2n$, et il convient de distinguer selon que $k>n+1$ ou $k\leq n+1$:

Si $2\leq k\leq n+1$, $P(X+Y=k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i)P(Y=k-i)=\frac{k-1}{n^2}$

Si $2n\geq k>n+1$, $P(X+Y=k)=\displaystyle\sum_{i=k-n}^{n}P(X=i)P(Y=k-i)=\frac{2n-k+1}{n^2}$

3. $P(X+Y=Z)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(X+Y=k)P(Z=k)=\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)=\dfrac{n-1}{n^2}$

Exercice 19

$Supp(Z)=\mathbb{Z}$; $\qquad P(X-Y=k)=\dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$; $\qquad \mathbb{E}[Z]=\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[Y]=\dfrac{1}{p_1}-\dfrac{1}{p_2}$

Exercice 20

1. ⋆ $Supp(D)\subset\mathbb{N}$

⋆ $\forall k\in\mathbb{N}^*, (D=k)=\bigsqcup\limits_{i\in\mathbb{N}^*}(Y-X=k, X=i)$ d'où

$$\begin{aligned}
P(D=k) &= \sum_{i=1}^{+\infty}P(Y=i+k, X=i)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}P(Y=i+k)P(X=i)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}p(1-p)^{i+k-1}p(1-p)^{i-1}\\
&= p^2\sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{2i-2+k}\\
&= p^2(1-p)^k\sum_{i=1}^{+\infty}((1-p)^2)^{i-1}\\
&= p^2(1-p)^k\frac{1}{1-q^2}=p^2(1-p)^k\frac{1}{(1-q)(1+q)}\\
&= \frac{pq^k}{1+q}
\end{aligned}$$

⋆ La famille $\{(D=k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet. Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(D=0) &= 1-\sum_{k=1}^{+\infty}P(D=k)\\
&= 1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{pq^k}{1+q}\\
&= 1-\frac{pq}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty}q^{k-1}\\
&= 1-\frac{pq}{1+q}\frac{1}{1-q}=1-\frac{pq}{1+q}\frac{1}{p}\\
&= 1-\frac{q}{1+q}=\frac{1+q-q}{1+q}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{P(D=k)=\begin{cases}\dfrac{pq^k}{1+q} & \text{si } k>0\\ \dfrac{1}{1+q} & \text{si } k=0\end{cases}}$$

2. D est une variable positive. Elle admet donc une espérance si la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |k|P(X=k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} kP(X=k)$$

converge, et dans ce cas, l'espérance est la somme totale de cette série. On a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kP(X=k) = \frac{q}{1+q}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kpq^{k-1}$$

Or, on sait que la somme de droite concerge et que sa somme totale correspond à $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$. Au coefficient d'indice 0 près (qui est nul !), on sait donc que l'espérance de D existe. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)\\ &= 0 + \frac{q}{1+q}\mathbb{E}[X] = \frac{q}{p(1+q)}\end{aligned}$$

i.e.

$$\boxed{\mathbb{E}(D) = \frac{q}{p(1+q)}}$$

Exercice 21

1. Les variables X et Y sont indépendantes. Ainsi, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = pq$.

2. a) • $Supp(XY) = \{0;1;2\}$.

• $X+Y$:

$Y\backslash X$	0	1
0	0	1
1	1	2

loi du couple :

$Y\backslash X$	0	1
0	$(1-p)(1-q)$	$p(1-q)$
1	$(1-p)q$	pq

La loi de W est donc :

k	0	1	2
$p(W=k)$	$(1-p)(1-q)$	$p+q-2pq$	pq

b) $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = p+q$.

c) • Supposons que W suive une loi binomiale. On note δ la probabilité de succès. Comme W prend les valeurs $0, 1, 2$, on a donc nécessairement

$$W \rightsquigarrow \mathcal{B}(2,\delta)$$

D'après la question précédente, comme

$$2\delta = \mathbb{E}[W] = p+q$$

on a

$$\delta = \frac{p+q}{2}$$

On a donc

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 = P(W=1) = pq$$

Ce qui donne

$$(p-q)^2 = 0$$

et donc

$$\boxed{p=q}$$

• Supposons que $p=q$. On sait alors que $\boxed{W \rightsquigarrow \mathcal{B}(2,2p).}$

Exercice 22

Soit X le nombre de faux tickets de la journée.

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(3)$$

Soit Y le nombre de confetti de deuxième classe sur les 4 confetti trouvés.

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(4, \frac{9}{10})$$

X et Y sont indépendantes.

On cherche $P(X<Y)$:
Comme $Supp(Y) = \{0,1,2,3,4\}$. On note $p = \frac{9}{10}$.

$$\begin{aligned}P(X<Y) &= \sum_{y=1}^{4} P(X<y\cap Y=y) = \sum_{y=1}^{4}\sum_{x=0}^{y-1} P(X=x, Y=y)\\ &= \sum_{y=1}^{4}\sum_{x=0}^{y-1} P(X=x)P(Y=y) = \sum_{y=1}^{4} P(Y=y)\sum_{x=0}^{y-1} P(X=x)\\ &= \sum_{y=1}^{4} P(Y=y)\underbrace{\sum_{x=0}^{y-1} e^{-3}\frac{3^x}{x!}}_{e^{-3}\frac{1-3^y}{1-3}}\\ &= \frac{e^{-3}}{2}\sum_{y=0}^{4} P(Y=y)(3^y-1)\\ &= \frac{e^{-3}}{2}\left(\sum_{y=1}^{4} 3^y P(Y=y) - \underbrace{\sum_{y=1}^{4} P(Y=y)}_{1-P(Y=0)}\right)\\ &= \frac{e^{-3}}{2}\left(\sum_{y=1}^{4} 3^y P(Y=y) - 1 + P(Y=0)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X<Y) &= \frac{e^{-3}}{2}\left(\sum_{y=0}^{4} 3^y P(Y=y)-1\right)\\
&= \frac{e^{-3}}{2}\left(\underbrace{\sum_{y=0}^{4}\binom{4}{y}(3p)^y(1-p)^{4-y}}_{(3p+1-p)^4}-1\right) = \frac{e^{-3}}{2}\left((2p+1)^4-1\right) \simeq 0.56
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{P(X<Y)=\frac{9}{10}e^{-3}}$$

Exercice 23

1. Tout d'abord, on sait que $Supp(N)=\mathbb{N}$, ainsi, $(\{N=i\})_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet de l'univers. De plus, $Supp(S_N)=\mathbb{N}$. Ainsi, si $i\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P(S_N=k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)P_{N=n}(S_N=k)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)P_{N=k}(S_k=i)\\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i} \quad (i\leq k)\\
&= \frac{e^{-n}}{i!}p^i\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{n^k}{(k-i)!}(1-p)^{k-i}\\
&= \frac{e^{-n}}{i!}p^in^i\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{n^{k-i}}{(k-i)!}(1-p)^{k-i}\\
&= \frac{e^{-n}}{i!}p^in^ie^{n(1-p)}
\end{aligned}$$

On observe que

$$\boxed{S_N \hookrightarrow \mathcal{P}(np)}$$

2. Les variables S_N et S_n étant de lois connues, respectivement "de Poisson" et "binomiale", on sait que leur espérance existe. De plus,

$$\mathbb{E}[S_N]=np=\mathbb{E}[S_n]$$

Ainsi, par linérité de l'espérance, on a bien $E\left(S_N-S_n\right)=0$.