Séries numériques

Chapitre 1 — *Support*

I Définition et somme totale

I-1 Généralités

Définition

Une suite $(S_n)_{n\geqslant N}$ est appelée *série* s'il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant N\quad S_n=\sum_{k=N}^{n}u_k$$

Dans ce cas, on appelle

- u_n le *terme général* de la série $(S_n)_{n\geqslant N}$;
- S_n la *somme partielle d'ordre n* de la série $(S_n)_{n\geqslant N}$.

et on note de manière plus explicite

$$\sum_{n\geqslant N}u_n$$

pour désigner la série $(S_n)_{n\geqslant N}$.

Exemple 1 :

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\underbrace{k^2}_{u_k}$. On a

$$S_1=\underbrace{1}_{u_1},\quad S_2=\underbrace{1}_{u_1}+\underbrace{2^2}_{u_2},\quad \dots,\quad S_n=\underbrace{1}_{u_1}+\underbrace{2^2}_{u_2}+\dots+\underbrace{n^2}_{u_n}$$

Contre-Exemple(s) :

1. $A_n=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k$ n'est pas une somme partielle
2. $B_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n+k}$ n'est a priori pas une somme partielle

Définition

On dit (trivialement) que la série $\sum\limits_{n\geqslant N}u_n$ *converge* (resp.*diverge*) si la suite $(S_n)_{n\geqslant N}$ *converge* (resp. *diverge*.), où $S_n=\sum\limits_{k=N}^{n}u_k$ pour tout $n\geqslant N$.

En cas de convergence, la limite sera notée $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=N}^{n}u_k=\sum\limits_{k=N}^{+\infty}u_k$ et sera appelée *somme totale* de la série $\sum\limits_{n\geqslant N}u_n$.

Exemples :

2. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}1$ est divergente.
3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}n$ est divergente.
4. Si $|q|<1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}q^n$ est convergente.

Objets

Ne pas mélanger les types d'objets en présence :

objet :	u_n	$S_n=\sum\limits_{k=N}^{n}u_k$	$\sum\limits_{k=N}^{+\infty}u_k=\sum\limits_{n=N}^{+\infty}u_n$	$\sum\limits_{n\geqslant N}u_n=\sum\limits_{k\geqslant N}u_k$
type :	nombre réel qui dépend de n		nombre réel : limite indépendante de n	suite *(liste de nombres)*

Exemple 5 :

On peut dire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac12}=2$, mais $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$ ne vaut **pas** $\frac{1}{1-\frac12}$. C'est une suite.

On a

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}=(S_n)=\left(\underbrace{1}_{S_0},\ \underbrace{1+\frac12}_{S_1},\ \underbrace{1+\frac12+\frac{1}{2^2}}_{S_2},\ \dots\right)\qquad \textit{(infinité de termes)}$$

Remarque :

Si la limite de la série est $\pm\infty$, on s'autorise toutefois souvent **par abus de notation** à écrire $\sum\limits_{k=N}^{+\infty}u_k=\pm\infty$, mais dans ce cas, on ne parle pas de somme totale, puisque ce nombre n'existe pas. (Oui, on rappelle en effet que ∞ n'est pas un nombre…)

Exercice 1

Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}2^n$ est divergente et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}2^n=+\infty$.

Définition

De même que pour une suite, on appelle *nature* de la série le caractère convergeant ou divergeant de la série.

Remarque :

Tout comme les suites, il existe des séries qui divergent autrement que vers $\pm\infty$!

Exemple 6 :

Si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Les sous-suites de (S_n) d'indices pairs et impairs convergent donc vers des limites différentes. Autrement dit, la série $\sum u_n$ diverge.

DIFFÉRENCE SUITE (u_n) /SÉRIE $\sum\limits_{n\geqslant N} u_n$

Ne pas confondre la convergence de la suite (u_n) et celle de la série $\sum u_n$!

Exemple 7 :

Si $u_n = 1$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. La suite (u_n) converge, alors que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

I-2 Changement de borne / de termes

VARIABLES

L'objet sur lequel on fait la limite est le "n" du $S_n = \sum\limits_{k=N}^{n}$ et non le "k" qui est juste une variable muette. Ainsi, la borne de départ N est importante dans le calcul de la limite :

Exemple 8 :

Si $|q| < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant \boxed{2}} q^n$ est convergente. En effet,

$$\sum_{k=2}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - (q^0 + q^1) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - (1+q) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-q} - (1+q) = \frac{q^2}{1-q}$$

D'où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ et $\sum\limits_{n=\mathbf{2}}^{+\infty} q^n = \dfrac{q^2}{1-q} \neq \sum\limits_{n=\mathbf{0}}^{+\infty} q^n$

Propriété

Pour une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ et pour tout $M \in \mathbb{N},\ M \geqslant N$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant \boldsymbol{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant \boldsymbol{M}} u_n$ sont de même nature.

CONFUSION

Même nature ne veut pas dire même somme totale ! *(cf ex précédent)*

Remarque :

S'il n'y a aucune ambiguïté sur la borne de départ N de la série (ou si elle n'a pas d'importance), on notera le plus souvent $\sum u_n$ pour désigner la série $\sum\limits_{n\geqslant N} u_n$.

Propriété

Si (u_n) et (v_n) ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

I-3 Calculs

Méthode 1 - Calcul de la somme totale par téléscopage

Le téléscopage est une méthode utilisée (dans des cas limités) pour aboutir au calcul explicite de la somme partielle puis de la somme totale. Il consiste à écrire le terme général u_n sous la forme d'une somme d'éléments de même type :

$$u_n = v_{n+1} - v_n,$$

qui, par changement d'indices, produiront l'élimination progressive de la plupart des termes.

Exemple 9 :

Calcul de la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$:

---

pour $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, on écrit $u_n = \underbrace{\dfrac{1}{n}}_{v_n} - \underbrace{\dfrac{1}{n+1}}_{v_{n+1}}$. Ainsi, par téléscopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{n} v_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{k=2}^{n+1} v_k = v_1 - v_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Autrement dit, la série est convergente et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$.

Méthode 2 - Décomposition

Propriété *(Combinaisons linéaires de séries)*

Soient $\sum_{n\geqslant N} u_n$ et $\sum_{n\geqslant N} v_n$ deux séries et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- i → Si $\sum_{n\geqslant N} u_n$ converge, alors la suite $\sum_{n\geqslant N} \lambda u_n$ converge vers $\lambda \sum_{n=N}^{+\infty} (u_n)$.
- ii → Si $\sum_{n\geqslant N} u_n$ **et** $\sum_{n\geqslant N} v_n$ convergent, alors la série $\sum_{n\geqslant N} (u_n+v_n)$ converge vers $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n + \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$.
- iii → Si $\sum_{n\geqslant N} u_n$ converge **et** $\sum_{n\geqslant N} v_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant N} (u_n+v_n)$ diverge.
- iv → Si $\sum_{n\geqslant N} u_n$ diverge **et** $\sum_{n\geqslant N} v_n$ diverge, alors on ne peut rien dire sur $\sum_{n\geqslant N} (u_n+v_n)$.

■ Exemple 10 :

La série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2}^n$ converge. *(application de i)*

■ Exemple 11 :

La série $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ diverge. *(application de iii)*

Remarque :

En cas de divergence vers l'infini, les principe des limites usuelles s'applique toutefois. Par exemple, si $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n = +\infty$ et $\sum_{n=N}^{+\infty} v_n = +\infty$, alors $\sum_{n=N}^{+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$. En revanche, si les deux limites infinies sont de signe opposé, alors c'est une forme indéterminée.

II Critères de convergence / divergence

II-1 Divergence grossière

Proposition

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Conséquence :

Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ ne peut être convergente.

■ Exemples :

12 ■ $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(2+\frac{1}{n})$ ne peut être convergente, car $\lim_{n\to+\infty} \ln(2+\frac{1}{n}) = \ln 2$.

13 ■ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin n\frac{\pi}{2}$ ne peut être convergente, car $(\sin n\frac{\pi}{2})$ est une suite divergente.

Réciproque fausse !

Il existe des séries divergentes, dont le terme général tend vers 0 :

Proposition

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Définition

Si une série $\sum u_n$ est telle que (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série *diverge grossièrement*.

II-2 Séries à termes de signe constant

II.2-a) Propriétés élémentaires des séries à termes positifs

Lemme

*On se donne $\sum u_n$ une série **à termes positifs** au moins à partir d'un certain rang. On a alors :*

- *i → La série $\sum u_n$ est croissante.*
- *ii → La série $\sum u_n$ converge si et seulement si elle est majorée. (et s'il y a convergence, sa somme totale est inférieure à son majorant.)*
- *iii → La série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$ ssi elle n'est pas majorée.*

■ Exemple 14 :

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n3^n}$ converge :

Notons
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k3^k}$$
Remarquons que la série est à termes positifs. Elle est donc croissante. De plus, pour tout $k \geqslant 1$, on a
$$\frac{1}{k3^k} \leqslant \frac{1}{3^k}$$
Ainsi, on a
$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \leqslant \frac{1}{2}$$
Ainsi, au total, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_n \leqslant \frac{1}{2}$$
C'est donc une suite croissante et majorée, donc convergente, avec même
$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n} \leqslant \frac{1}{2}$$

II.2-b) Critère de comp. de deux séries à termes positifs

Théorème *de comparaison des séries à termes positifs (TCSTP)*

On se donne deux suites (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang N,

- *(u_n) et (u_n) sont* **positives**
- *$u_n \leqslant v_n$.*

Alors

i → Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$.

ii → Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

■ Exemples :

15 ■ La série $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^n$ converge.

16 ■ La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{n+1}{n(n-1)}$ diverge.

II.2-c) Equivalence

Théorème

On se donne deux suites (u_n) et (v_n) telles que,

i → à partir d'un certain rang N, (u_n) et/ou (v_n) sont **positives**

ii → $u_n \sim v_n$.

Alors $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ cv (elles sont de même nature)

Remarque :

De manière équivalente, la conclusion du théorème précédent peut également être "$\sum u_n$ diverge ssi $\sum v_n$ diverge".

■ Exemple 17 :

Montrons que la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ converge :

On oberve trivialement que les termes de la série sont tous positifs. De plus, comme
$$\frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
On sait que $\ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right) \sim \frac{1}{n(n+1)}$. Or, nous avons déjà montré par téléscopage que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ était convergente. En conclusion, $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ converge.

? Exercice 2

Montrer que la série $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n(n+1)}\right)$ converge. (*Attention, ici les séries sont négatives !!*)

Erreur de raisonnement

Equivalence des termes généraux ne signifie EN AUCUN CAS que les séries le sont équivalentes !!

■ Exemple 18 :

Remarquons que
$$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n(n-1)}$$
(on peut passer par $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n-1)}$). Mais
$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n+1)} \not\sim \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$$

Vérification hypothèses
Le théorème précédent s'applique également à des séries dont les termes sont "négatifs à partir d'un certain rang". En revanche, attention à **ne pas l'appliquer si les termes ne sont pas de signe constant !**

Exemple 19 :
Avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, on observe que :
$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
Or, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (admis ici) mais $\sum u_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum \frac{1}{n}$ est ainsi la combinaison linéaire d'une série convergente et d'une série divergente. Elle est donc bien **divergente**, contrairement à $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui elle, est convergente !

II.2-d) Séries à termes négatifs

Remarque :
Tous les résultats de la section II-2 peuvent être transposés plus ou moins directement au cas où on a u_n et v_n **tous deux négatifs à partir d'un certain rang** N. *(On pourra éventuellement s'interroger sur ce point.)*
Néanmoins, afin de ne pas multiplier (et surtout mélanger) les résultats à retenir, il est plus aisé pour vous de poser simplement deux autres suites a_n, b_n telles que $a_n = -u_n,\ b_n = -v_n$. Ainsi, on a
$$a_n, b_n \geqslant 0\ \forall n \geqslant N$$
et on peut alors tenter de conclure dans un premier temps sur les séries $\sum a_n = -\sum u_n$ et $\sum b_n = -\sum v_n$. L'important est que le signe soit **constant et identique pour les deux séries** à partir d'un certain rang.

? Exercice 3
Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \ln \frac{1}{n+1} e^{-n+1}$ converge.
(On pourra utiliser que $\ln(1+x) \leqslant x \quad \forall x \geqslant 0$*)*

II-3 Convergence absolue

Proposition

On se donne une série quelconque $\sum u_n$.
Si la série $\sum |u_n|$ converge, **alors** la série $\sum u_n$ converge.
On appelle ceci *la convergence absolue*.

Réciproque fausse
voyons ceci dans l'exemple suivant :

Exemple 20 :
Soit la série harmonique alternée : $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
Elle n'est pas absolument convergente, mais est convergente. (*non démontré ici, mais cf. fin de chapitre (p.7) pour une observation graphique.*)

III Exemples fondamentaux

Méthode 3 - Détermination d'une convergence

Si le terme général de la série est de signe quelconque éventuellement fluctuant : on pourra chercher à prouver sa convergence absolue ou à décomposer en somme des séries dont on connait la convergence.

Si le terme général de la série est positif : on pourra tenter de majorer / minorer par une suite plus simple ou alors en chercher un équivalent plus simple.

Si le terme général de la série est négatif : on peut transposer les theorèmes sur les séries à termes positifs, ou alors poser la série $\sum(-u_n)$

Dans tous les cas, les séries auxquelles on peut se référer sont celles qui suivent dans cette partie. Toutes les autres sont à redémontrer.

III-1 Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$

Remarque :
Pour la culture *(HP)*, on appelle généralement *série de Riemann* toute série de type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
Au programme deux sont à connaître : les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

Proposition

Rappel : La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Proposition

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

? Exercice 4
Montrer que toute série de type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est :
- convergente si $\alpha \geqslant 2$.
- divergente si $\alpha \leqslant 1$.

Remarque :

Les résultats précédents ne permettent pas de conclure sur la convergence ou la divergence des séries de type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ si $1 < \alpha < 2$. Ces résultats existent mais ne sont pas à notre programme.

Exercice 5

Montrer que $\sum e^{\frac{2}{n^2}}$ converge.

III-2 Séries géométriques

Définition

On appelle *série géométrique* toute série $\sum_{n \geqslant N} q^n$, où $q \in \mathbb{C}$.

Théorème

- *$\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.*
- *Si $|q| < 1$ la somme totale existe et vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.*

III-3 Série "dérivée" $\left(\sum nq^{n-1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Théorème

- *$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} nq^{n-1}$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.*
- *Si $|q| < 1$ la somme totale existe et vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.*

Moyen mnémotechnique : Pour retenir ce résultat, on "dérive" terme à terme par rapport à q" l'expression $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, pour obtenir $\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$.

Interprétation fausse

Ne pas voir dans ce moyen mnémotechnique un quelconque résultat sur les dérivées de séries !

Exercice 6

Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} nq^n$ est **convergente** si et seulement si $|q| < 1$et que dans ce cas, la somme totale vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

III-4 Série "dérivée seconde" $\left(\sum n(n-1)q^{n-2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Théorème

- *$\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.*
- *Si $|q| < 1$ la somme totale existe et vaut $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$*

Moyen mnémotechnique : Pour retenir ce résultat, comme pour $\sum nq^{n-1}$, on "dérive" terme à terme par rapport à q" l'expression $\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1}$, pour obtenir $\frac{2}{(1-q)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}$.

Interprétation fausse

Encore une fois, ne pas voir dans ce moyen mnémotechnique un quelconque résultat sur les dérivées de séries !

Exercice 7

Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et que, dans ce cas, la somme totale vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$.

Exercice 8

De manière générale, montrer que, pour $a \in \mathbb{N}$, si $|q| < 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n(n-1)\dots(n-a+1)q^{n-a}$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n-a)!} q^{n-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-a+1)q^{n-a} = \frac{a!}{(1-q)^{a+1}}$$

III-5 Série exponentielle

Définition
On appelle *série exponentielle* toute série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Proposition

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ est convergente.
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

III-6 Application

Méthode 4 - Calcul explicite de la somme totale

Pour déterminer la convergence puis la somme totale d'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, on peut chercher à décomposer en somme de séries connues.

Exercice 9
Déterminer la convergence et la somme totale de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+4}{3^n}$

IV Et si on change l'ordre des termes ?

Dans une somme finie de nombres réels, on sait (commutativité dans $\mathbb{R}$) que l'on peut additionner les nombres dans n'importe quel ordre. Plus précisément, pour toute permutation $\varphi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ d'indices, on sait que

$$a_1 + \dots + a_n = a_{\varphi(1)} + \dots + a_{\varphi(n)}$$

La question ici est de savoir si oui ou non le même raisonnement est vrai dans le cas d'une somme infinie de termes. Nous allons tenter de nous convaincre graphiquement que la réponse est NON !

Considérons la "série harmonique alternée" $S = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ convergente (vers $\ln 2$). C'est la somme, "de gauche à droite", des éléments

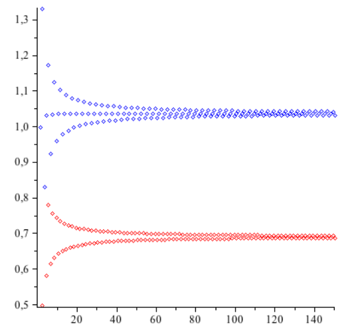
$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \dots$$

Tentons maintenant d'additionner les termes d'une autre manière. Nous prendrons 2 positifs pour un négatif. "De gauche à droite" :

$$1, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{7}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \dots$$

Nous admettrons que cette série converge également.

Ces deux séries (série harmonique en bas ... en rouge, l'autre en haut ... en bleu) sont représentées sur le graphique suivant :



Si on veut bien admettre que nous pouvons faire confiance au graphique en ce qui concerne le comportement asymptotique, nous constaterons que les sommes totales sont nettement différentes, ce qui devrait nous convaincre qu'en cas de somme infinie, en général, il faut faire attention à l'ordre dans lequel on somme les éléments !

Toutefois, la majorité des cas raisonnables que nous aurons à étudier ne poseront pas ce type de problèmes. En effet :

Théorème

Si une série $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente, alors la somme des u_n peut se faire dans n'importe quel ordre.

Corollaire

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **positive** *est telle que $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors, alors la somme des u_n peut se faire dans n'importe quel ordre.*