ESPACES VECTORIELS

CHAPITRE 5 — *Cours à trous*

I Généralités

I-1 Structure d'un espace vectoriel

Dans tout ce paragraphe, on se donne $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Étant donné un ensemble E, on appelle

- *Loi interne*, ...
  ...
- *Loi externe*, ...
  ...

Exemples :

1. Pour $E = \mathbb{K}^n$, les loi classiques sont

$$\text{Loi interne : } \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & \dots \end{array} \quad \text{et} \quad \text{loi externe : } \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \dots \end{array}$$

2. Avec $E = [0; +\infty[$:

	Oui	Non
Loi interne		
Loi externe		

Définition

On appelle *$\mathbb{K}$-espace vectoriel* (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) ...

• $(E, \boxplus)$ est un groupe commutatif :

- *loi interne :* ...
- *Commutativité :* ...
- *élément neutre :* ...
  (donc E est **non vide** !)
- *symétrique :* ...
- *associativité :* ...

• Distributivité / associativité de $\cdot$: ...

- *loi externe :* ...
- *distributivité de $\cdot$ par rapport à $\boxplus$:* ...
- *distributivité de $+$ par rapport à $\cdot$:* ...
- *Associativité :* ...
- *Élément neutre :* ...

On note $(E, \boxplus, \cdot)$ cet espace.

Contre-Exemple(s) :

• $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ munis des additions et loi externe habituelle (multiplication), ...

• Considérons $E = [0, +\infty[$ muni de la loi $\boxplus$ définie par $x \boxplus y = \sqrt{xy} \quad \forall x, y \in E$.
...
...

Exemple 3 :

À voir sur la feuille d'exercices

Définition

Théorème

Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$:

- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$
- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$
- $(\mathcal{F}(I, E), +, \cdot)$ *avec* $(E, \boxplus, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-e.v.,* I *un intervalle et*

$$f + g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) \boxplus g(x) \end{array} \quad \textit{et} \quad \lambda \cdot f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda \bullet (f(x)) \end{array}$$

Notation :
On écrira souvent "ev" ou "e.v." pour "espace vectoriel" et $\mathbb{K}$-ev" pour "espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Plus généralement, quand il n'y aura pas de doute possible, on pourra dire "espace vectoriel" au lieu de "$\mathbb{K}$-espace vectoriel".

Propriété

Si $(E, \boxplus, \cdot)$ est un espace vectoriel, alors :

- i ...
- ii ...
- iii ...
- iv ...

Démonstration :

- Montrons que l'élément neutre est unique :

- Montrons que l'élément symétrique est unique :

- Montrons que pour tout $u \in E$, on a $0_E = 0 \cdot u$:

- Montrons que pour tout $u \in E$, le vecteur $(-1) \cdot u$ est le symétrique de u :

□

Notation :
À partir de maintenant, on adoptera la notation $+$ en remplacement de $\boxplus$, sauf s'il peut y avoir confusion.

Notation :
La propriété préc. (iv) légitime la notation $-u$ pour désigner le symétrique de u. On écrira donc "$u - v$" à la place de : "$u +$ symétrique de v".

I-2 Sous-espace vectoriel

Définition
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *sous espace vectoriel ("sev") de E* tout sous ensemble F non vide de E tel que $(F, +, \cdot)$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 4 :
Dans $\mathbb{R}^3$, on a vu en première année que $\mathrm{Vect}((1,0,0)) \subset \mathbb{R}^3$ était un sev de $\mathbb{R}^3$.

Théorème *(Caractérisation des sev 1)*

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. F est un sous espace vectoriel de E ...

- *i* *F est non vide*
- *ii* ...
- *iii* ...
- *iv* ...

Démonstration :

□

Les conditions *ii* et *iv* avec $\lambda = 0$ dans la propriété précédente donnent en particulier :

Corollaire

Tout sev F d'un espace vectoriel E contient 0_E. De plus, $0_E = 0_F$.

Démonstration :
F étant non vide, Il existe $u \in F$. On sait que $0_E \underset{\text{ppé précédente}}{=} 0 \cdot u \underset{\text{par } iv}{\in} F$. □

Remarque :

La condition i) peut être simplement remplacée par "$0_E \in F$." En effet, dans ce cas, F est bien non vide ! D'où la méthode suivante :

Méthode (Pour déterminer si F est un sev :)

En pratique, pour vérifier si un sous ensemble F d'un espace vectoriel E est un sev, on pourra donc commencer par vérifier que $F \subset E$ puis $0_E \in F$.

- ⋆ Si $0_E \notin F$, alors F n'est pas un sev.
- ⋆ Si $0_E \in F$, alors on vérifie les conditions de stabilité.

On obtient donc un premier exemple de sous-espace vectoriel, à connaître :

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (et $\mathbb{R}$).

Démonstration : exercice. □

Théorème (Caractérisation des sev 2)

Soient $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- *i* ■ ...
- *ii* ■ ...
- *iii* ■ ...

Démonstration :

Par le théorème de caractérisation 1, il suffit de vérifier que la condition iii) est équivalente au système des deux conditions $\begin{cases} 1- \quad \forall u, v \in F, \text{ on a } u+v \in F \\ 2- \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, u \in F, \text{ on a } \lambda u \in F. \end{cases}$

• Supposons que les conditions du TCSEV1 sont vérifiées, alors $\forall u, v \in E, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\underbrace{\underbrace{\lambda u}_{\in F \text{ par } iv} \quad + v}_{\in F \text{ par } iii}$$

• Supposons la condition vérifiée : $\forall u, v \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda u + v \in E.$
Montrons que la condition 1- est vérifiée : Il suffit de prendre $\lambda = 1$
Montrons que la condition 2- est vérifiée : Il suffit de prendre $v = 0_E$. □

Exercice 1

1. Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite passant par l'origine est un $\mathbb{R}$- ev.

2. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tout ensemble $\{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ où $u \in E$ fixé est un sev de E. (ex dans $\mathbb{R}^2$.)

Corollaire *de la caractérisation 2 :*

pour tout intervalle I, l'ensemble $\mathcal{C}^n(I, R)$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Démonstration : exercice. □

Proposition

Toute intersection de sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev est un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration :

□

Remarque :

Une intersection de sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev E n'est jamais vide, elle contient au moins toujours ...

II Famille génératrice, famille libre et base

(rappel : on considère toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.) On dira également "espace vectoriel" pour "$\mathbb{K}$-espace vectoriel" tout le long du reste du chapitre.

II-1 S.e.v. engendré (Vect) et famille génératrice

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $a_1, \ldots, a_r \in E$. On dit que $v \in E$ est *combinaison linéaire de $a_1, \ldots, a_r$* s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r$$

Exemple 5 :

Pour $E = \mathbb{C}^3$ et $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ alors $v = \begin{pmatrix} 2+i \\ 2i-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de a_1, a_2 car $v = 2a_1 - a_2$.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $A = \{a_1, \ldots, a_r\} \subset E$ une famille finie de E. On note $\text{Vect}(A)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles entre les éléments de A :

$$\text{Vect}(A) = \{\alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_r a_r \,|\, \alpha_i \in \mathbb{K} \ \forall i = 1, \ldots, r\}.$$

Exemples :

6 ■ Dans $\mathbb{C}^3$, on pose $A = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$. $\text{Vect}(A) = \ \ldots$

7 ■ Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $A = \{1, X\}$. $\text{Vect}(A) = \ \ldots$.

Ci-dessous une propriété immédiate de contenu très utile !

Propriété

Dans les conditions de la définition précédente, on a :

i ■ $A \subset \text{Vect}(A)$ (i.e. $\text{Vect}(A)$ contient tous les éléments de A) ;

ii ■ $\text{Vect}(A)$ est un $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de E ;

iii ■ $\text{Vect}(A)$ est "le plus petit $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de E contenant A", au sens où :

si $A \subset F$ où F est un $\mathbb{K}$-sev de E, alors $\ldots$

Démonstration :

i) $a_i = \alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_r a_r \in Vect(A)$ avec $a_j = 0$ pour tout j sauf $j = i$ où $a_i = 1$.
ii) exercice
iii) Soit $u \in Vect(A)$. Alors il existe $\alpha_1, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que $u = \alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_r a_r$.
Or, F est un $\mathbb{K}$-ev. Ainsi, comme $a_1, \ldots, a_r \in F$, et que $\alpha_1, \alpha_r \in \mathbb{K}$, on a de fait $\alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_r a_r \in F$. D'où $u \in F$ et donc au final

$$\text{Vect}(A) \subset F$$

□

Exemple 8 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $A = \{(1,1,0), (2,0,0)\}$.

$$\text{Vect}(A) = \ \ldots$$

en effet, si on pose $F = \{(x,y,0) | x, y \in \mathbb{R}\}$, on a clairement $A \subset F$, donc $\text{Vect}(A) \subset F$. On connait déjà la notion de dimension dans $\mathbb{R}^3$, on peut alors justifier ensuite que $\dim A = \dim F$, donc on a bien $\text{Vect}(A) = F$.

Exemple 9 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $A = \{X, X-1\}$.

$$\text{Vect}(A) = \ \ldots \qquad :$$

De même que tout à l'heure, on a clairement $A \subset F$ et donc $\text{Vect}(A) \subset F$. Des arguments de dimension pourront également plus tard justifier l'égalité. En revanche, si on veut prouver ceci maintenant, il faut justifier différemment, en montrant que $F \subset A$: Ainsi, si $P \in \mathbb{R}_1[X]$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = a + bX = -a(X-1) + aX + bX = -a(X-1) + (a+b)X \in \text{Vect}(A)$$

c'est fini !

De la propriété de tout à l'heure, on tire maintenant le vocabulaire suivant :

Définition

Exemples :

10 ■ Dans $\mathbb{R}^3$, une famille génératrice de $F = \{(x,y,z) | x - y + 2z = 0\}$ est

$$\ldots \qquad :$$

$\ldots$

11 ■ La famille $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ est génératrice de $\ldots$, car

...

12 ■ La famille $\{1, X, X^2\}$ est de même génératrice de ... .

13 ■ Une famille génératrice de $\{P \in \mathbb{C}_2[X] \mid P(0) = 0\}$ est ... car

...

■ Contre-Exemple(s) :

Il n'y a pas de famille génératrice finie pour $\mathbb{K}[X]$.

En effet, (par l'absurde) : ...

II-2 Famille libre

Définition

• Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille est *libre* (ou que les vecteurs sont *linéairement indépendants*) si

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \qquad \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

• Une famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ non libre est dite *liée*.

Autrement dit : Une famille est libre, si on ne peut pas exprimer les vecteurs les uns en fonction des autres. S'il existe un (ou plusieurs) vecteur(s) qui peut s'écrire en fonction des autres, alors elle est trivialement liée.

■ Exemple 14 :

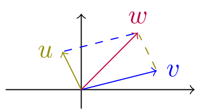
Si $A = \{a_1, \ldots a_r\}$ est une famille finie de E et que $v \in \mathrm{Vect}(A)$, alors la famille $\{a_1, \ldots a_r, v\}$ est liée.

■ Exemple 15 :

Dans $\mathbb{R}^2$, le schéma ci-contre représente trois vecteurs liés car

$$w = u + v, \text{ i.e. } u + v - w = 0.$$

En revanche, les vecteurs u, v sont libres (ainsi que les vecteurs u, w ou les vecteurs v, w. *à méditer...*)



Confusion

Il existe toujours $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$.
(il suffit en effet de prendre tous les $\alpha_i = 0$.)
Ce n'est pas ça qu'il faut vérifier et ceci est une erreur fréquemment commise !

Donc en pratique, le sens $\Leftarrow$ est évident. Le seul sens à vérifier est $\Rightarrow$, c'est-à-dire : "**Soient** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tels que $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. **Montrons que** $\alpha_1 = .. = \alpha_n = 0$"

Exercice 2

(révisions) Dans $\mathbb{C}^3$, montrer que $\{(1, 3, -1), (2, 1, i), (1, 0, 0)\}$ est une famille libre.

■ Exemple 16 :

Montrer que la famille $\{f : x \mapsto x, g : x \mapsto e^{-x}, h : x \mapsto 1 + \cos x\} \subset \mathcal{C}^\infty(]-1, +\infty[)$ est une famille libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0 \quad (\star)$$

On a

$$\begin{aligned}(\star) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x > -1, \quad \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x > -1, \quad \alpha x + \beta e^{-x} + \gamma(1 + \cos x) = 0\end{aligned}$$

Avec $x = 0$, on obtient $\beta + \gamma = 0$. On propose ensuite de dériver l'expression :

$$\alpha - \beta e^{-x} - \gamma \sin x = 0$$

et donc, en $x = 0$ là aussi, on a $\alpha - \beta = 0$. Finalement, on propose de passer à la limite en $+\infty$ sur la dérivée et on trouve que, si $\gamma \neq 0$, on arrive à

$$\alpha - \gamma \sin x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ce qui est impossible car sin diverge, sauf dans le cas où $\gamma = 0$.
Au final , on obtient le système

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \gamma = 0 \end{cases}$$

Ce qui après une très rapide résolution donne la seule possibilité $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Exercice 3

(révisions)

1. Montrer que dans un espace vectoriel, **deux** vecteurs sont linéairement indépendants ssi ils sont non colinéaires.

2. Montrer que dans $\mathbb{K}^3$, les vecteurs $(1,1,1),(0,6,5)$ et $(-2,4,3)$ ne sont pas linéairement indépendants.‘

Exercice 4

Vérifier que dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions $f : x \mapsto \cos^2(x)$, $g : x \mapsto \cos(2x)$, $h : x \mapsto 1$ ne sont pas linéairement indépendantes.

Exercice 5

On note $I =]1,+\infty[$. Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \arctan \frac{1-x}{1+x}$, $g : x \mapsto \arctan x$, $h : x \mapsto 1$ dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ ne sont pas linéairement indépendantes.

Propriété

Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

`Démonstration :`

□

II-3 Base

II.3-a) Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. Si elle est libre et génératrice de E, on dit que c'est une *base* de E.

Propriété

- Base canonique de $\mathbb{K}^n$: $\mathcal{B} = \{(1,0,0,\dots),(0,1,0,\dots),\dots,(\dots 0,0,1)\}$ est une base du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}^n$.
- Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^n\}$ est une base du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}_n[X]$.

`Démonstration :`

Dans chaque cas, on a trivialement que les $\mathcal{B}$ sont des familles génératrices respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

- Dans le cas de $\mathbb{K}^n$, on montre que la famille est libre avec les techniques habituelles.
- Dans le cas de $\mathbb{K}_n[X]$, on sait d'après le cours sur les polynômes que la famille est libre car il s'agit d'une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. □

Exercice 6

(révisions) Montrer que $\mathcal{B} = \{(1,3,-1),(2,1,i),(1,0,0)\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

■ Exemple 17 :

Montrons que la famille $\mathcal{F} = (1 + X, 2)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

On a tout d'abord $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}_1[X]$ une famille de polynômes de degrés 2 à deux distincts, donc libre.

Montrons ensuite que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$, i.e. $\mathbb{R}_1[X] = Vect(\mathcal{F})$.
On pose $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ un polynôme quelconque. $\mathcal{F}$ est génératrice ss'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P = \alpha(1 + X) + \beta \times 2$.
Or,

$$P = \alpha(1+X) + \beta \times 2 \Leftrightarrow aX + b = \alpha + 2\beta + \alpha X$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = b \\ \alpha = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(b-a) \\ \alpha = a \end{cases}$$

Étant donné qu'il existe bien une solution à l'équation, la famille est bien génératrice.
(Plus tard, on verra de plus que le fait que la solution est unique assure également la liberté de la famille en même temps !)
En conclusion, la famille étant libre et génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$, c'est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

Remarque :

Dans certains espaces, on ne peut pas trouver de famille finie vérifiant les propriétés libres et génératrices. (Par exemple, pour $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.) (démontré pour $\mathbb{K}[X]$ et en conséquence pour $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.)

II.3-b) Existence d'une base : extraction d'une famille génératrice

Théorème

Dans un espace vectoriel E, de toute éventuelle famille génératrice A finie non vide, on peut extraire une base de $F = \mathrm{Vect}(A)$.

Démonstration : admise. □

Commentaires :

Ce théorème dit essentiellement que si un espace vectoriel admet au moins une famille génératrice finie, alors il admet également une base, c'est-à-dire ici une famille libre et génératrice que l'on peut extraire de la famille génératrice "de départ".

■ Exemple 18 :

Soit $A = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tels que $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, -1, 1)$.
On considère $F = \mathrm{Vect}(A)$. Alors A est génératrice finie de F. On peut en extraire une base de F.
On sait que la famille A n'est pas libre et on a

$$u_3 = u_1 - u_2$$

Ainsi, (u_1, u_2) est encore génératrice de F. Or, ce sont deux vecteurs non colinéaires, donc ils sont libres. On a donc la famille

$$B = \{u_1, u_2\} \subset A$$

qui est génératrice de F et libre. C'est bien une base de F extraite de A.

Commentaires :

La technique est donc de retirer des éléments un par un en faisant attention à ce que la famille soit encore génératrice à chaque fois jusqu'à l'obtention d'une famille libre. Dans certains cas, un raisonnement par dimension pourra également être utile et accélérer un peu les choses. *(cf p. 10)*

III Dimension, rang et recherche de base

III-1 Dimension

Théorème

Si un espace vectoriel admet une base de cardinal n, alors …

Démonstration :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Supposons qu'elles soient de cardinal différent. Quitte à les échanger, on peut supposer que $card\ \mathcal{B}' < card\ \mathcal{B}$. La base $\mathcal{B}'$ est donc en particulier une famille libre dans l'espace $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. On va montrer que ceci n'est pas possible, ce qui imposera $card\ \mathcal{B}' = card\ \mathcal{B}$.

• Montrons par récurrence sur p que "toute famille de $p + 1$ éléments de $F_p = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est forcément liée dans E".

* Initialisation : Si $p = 1$:
Soit $G = \{g_1, g_2\}$ une famille de $F_p = \mathrm{Vect}(u)$. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $g_1 = \alpha u$ et $g_2 = \beta u$.

Si $\alpha = \beta = 0$, alors $g_1 = g_2 = 0$, la famille G est donc liée.
Sinon, l'un des deux au moins est non nul et de plus on a cliarement

$$\alpha g_2 - \beta g_1 = \alpha\beta(u - u) = 0$$

La famille G est donc bien liée.

* Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour $p \in \mathbb{N}$. :
Soit $G = \{g_1, \dots, g_{p+2}\}$ une famille de $F_{p+1} = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p+1})$. Il existe alors $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+2} \in \mathbb{R}$, $v_1, \dots v_{p+1} \in F_p = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ tels que

$$\begin{array}{lcll} g_1 & = & \lambda_1 u_{p+1} & +v_1 \\ & & \dots & \\ g_{p+1} & = & \lambda_{p+1} u_{p+1} & +v_{p+1} \\ g_{p+2} & = & \lambda_{p+2} u_{p+1} & +v_{p+2} \end{array}$$

Si $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = 0$, alors G est une famille de F_p. En conséquence, par hypothèse de récurrence, $\{g_1, \dots, g_{p+1}\}$ est liée, et donc, la famille $G = \{g_1, \dots, g_{p+2}\}$ est liée.
Sinon, il existe un λ non nul. Quitte à renommer la famille, on peu supposer que c'est λ_{p+2}. En réécrivant la dernière ligne du système ci-dessus, on peut donc exprimer u_{p+1} en fonction de g_{p+2} et de F_p de la manière suivante :

$$u_{p+1} = \frac{1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} - v_{p+2}$$

On réinjecte dans le système :

$$\begin{array}{lcll} g_1 & = & \lambda_1 \dfrac{1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} & -v_{p+2} + v_1 \\ & & \dots & \\ g_{p+1} & = & \lambda_{p+1} \dfrac{1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} & -v_{p+2} + v_{p+1} \\ u_{p+1} & = & \dfrac{1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} & -v_{p+2} \end{array}$$

On en déduit que $g_1 - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2}$, $\dots$, $g_{p+1} - \dfrac{\lambda_{p+1}}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} \in F_p$. Par hypothèse de récurrence, ces éléments sont liés, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1 \left(g_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} \right) + \dots + \dots \alpha_{p+1} \left(g_{p+1} - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} \right) = 0$$

Autrement dit,

$$\alpha_1 g_1 + \dots \alpha_{p+1} g_{p+1} + (-\alpha_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_{p+2}} - \alpha_{p+1} \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_{p+2}}) g_{p+2} = 0$$

La famille G est donc bien liée.

• On note $n = card\ \mathcal{B}$. On vient donc de montrer que toute famille de cardinal $n+1$ est liée. La famille $\mathcal{B}'$ est de cardinal supérieur ou égal à $n+1$. Elle contient donc une famille de cardinal $n+1$ qui sera liée. En conclusion, $\mathcal{B}'$ est liée, ce qui est contradictoire. □

Définition

Un espace vectoriel E est dit de *dimension n* s'il admet une base de cardinal n. On note $\dim E = n$.
On dit qu'un espace vectoriel est de *dimension finie* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim E = n$.

■ Exemples :

19 ■ $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, une base est la base canonique
$$(1, 0, \dots, 0),\ (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$$

20 ■ $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$. Une base est la base canonique $1, X, \dots, X^n$.

Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :

- *i* ■ *Toute famille libre admet ...*
- *ii* ■ *Toute famille génératrice admet ...*
- *iii* ■ *Une famille libre de n éléments ...*
- *iv* ■ *Une famille génératrice de n éléments ...*

Démonstration :

i) : C'est ce qui a été fait dans la démonstration du théorème précédent.

ii) : S'il existe une famille génératrice avec $r < n$ éléments, alors on peut en extraire une base de cardinal $s \leq r$ et donc $s < n$, ce qui est impossible.

iii) : On note $\mathcal{F}$ une famille libre à n éléments non génératrice. Alors il existe $v \in E$ tel que $v \notin Vect(\mathcal{F})$. Ainsi, la famille $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est une famille libre contenant $n+1$ élément, ce qui contredit i.)
iv) On note $\mathcal{F}$ une famille génératrice à n éléments. Si elle n'est pas libre, alors on peut retirer un élément v de manière à ce qu'elle reste encore génératrice. On peut ensuite extraire une base de la famille $\mathcal{F}\ \{v\}$ qui sera donc de cardinal $\leq n-1 < n$, ce qui est contradictoire. □

Dit autrement :

- i ■ Si E admet une famille libre de cardinal p, alors $\dim E$ ... .
- ii ■ Si E admet une famille génératrice de cardinal p, alors $\dim E$ ... .
- iii ■ Si E admet une famille libre de cardinal p qui n'est pas génératrice, alors $\dim E$ ... .
- iv ■ Si E admet une famille génératrice de cardinal p qui n'est pas libre, alors $\dim E$ ... .

Voici un exemple d'utilisation de ces propriétés dans le cadre de la recherche d'une base par extraction d'une famille libre déjà vu autrement :

Exemple 21 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Alors la famille $\mathcal{F} = \{2,\ 3+X,\ X^2-1,\ X^3+2X-4\}$ est une base de E :

En effet, la famille étant une famille de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts,

elle est donc libre.

De plus,

$$\operatorname{card} \mathcal{F} = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X].$$

Ainsi, les deux arguments réunions font que c'est bien une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Ces résultats peuvent nous servir également à une justification lors de l'extraction d'une base. Par exemple :

Exemple 22 :

Soit $A = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tels que $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, -1, 1)$.
On considère $F = \operatorname{Vect}(A)$. Alors A est génératrice finie de F par définition. On peut en extraire une base de F.
A contient deux vecteurs non colinéaires u_1 et u_2. Ainsi, (d'après i))

$$\dim F \ \ldots$$

De plus, on peut montrer que A n'est pas libre (mais génératrice), donc (Ppé iv))

$$\dim \operatorname{Vect}(A) < \operatorname{card}(A) = 3$$

Ainsi :

$$\dim \operatorname{Vect}(A) \ \ldots$$

Or, $B = \{u_1, u_2\}$ est une famille libre de cardinal $2 = \dim \operatorname{Vect}(A)$, c'est donc une base de F extraite de A. (iii))

Proposition

Soit F un sous espace vectoriel d'un ev E de dimension finie n. Alors, F est de dimension finie et

$$\dim F \ \ldots \ \dim E.$$

Démonstration :

Soit $\mathcal{B}$ une base de F. Alors $\mathcal{B} \subset E$ et c'est donc une famille libre de E. Ainsi, $\dim E \geqslant \operatorname{card}(\mathcal{B}) = \dim F$. □

Corollaire

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors

$$F = G \iff \ldots$$

Exemple 23 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $A = \{X, X-1\}$. $\operatorname{Vect}(A) = \mathbb{R}_1[X]$:

On a trivialement $A \subset F \Rightarrow \operatorname{Vect}(A) \subset F$. Maintenant, comme $X, X-1$ sont non colinéaires, ils sont libres et donc

$$\dim A \geqslant 2 = \dim F, \qquad \text{Ainsi, } F = A.$$

III-2 Rang d'une famille

Définition

On appelle *rang* d'une famille A la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On note $rg(A)$.

Exemples :

24 ■ $rg\{1, 2X+1\} = \ \ldots$

25 ■ $rg\{(1,1,0),(3,3,0)\} = \ \ldots$

Remarque :

Les propriétés de la partie précédente nous permettent de dire que :

Propriété

- i ■ $rg(a_1, \ldots, a_p) \leqslant p$.
- ii ■ $rg(a_1, \ldots, a_p) < p$ ssi la famille $\{a_1, \ldots, a_p\}$ n'est pas libre.
- iii ■ $rg(a_1, \ldots, a_p) = p$ ssi la famille $\{a_1, \ldots, a_p\}$ est libre.
- iv ■ $rg(a_1, \ldots, a_p) = p$ ssi la famille $\{a_1, \ldots, a_p\}$ est une base.

Démonstration :

i) : issue du ii) du Corollaire p.9
ii) : Si la famille $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$ est libre, alors elle est libre et génératrice de $\operatorname{Vect}(A)$, donc

$$rg(A) = \dim \operatorname{Vect}(A) = p$$

Ainsi, on obtient

$$rg(a_1, \ldots, a_p) < p \quad \Rightarrow \quad \text{la famille } \{a_1, \ldots, a_p\} \text{ n'est pas libre.}$$

Si la famille $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$,n'est pas libre, alors c'est la propriété iv) du Corollaire p.9 qui nous dit que

$$rg(a_1, \ldots, a_p) = \dim \operatorname{Vect}(A) < p$$

iii) : conséquence directe de i) et ii)
iv) : La famille $(a_1, \ldots, a_p$ est nécessairement génératrice de $\operatorname{Vect}(A)$. C'est donc une conséquence immédiate de iii). □

III-3 Théorème de la base incomplète

Théorème *de la base incomplète*

Supposons que E est un $\mathbb{K}$-ev dans il existe une famille génératrice finie. Alors, toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Démonstration : admise. □

■ **Exemple 26 :**

Dans $\mathbb{R}^3$, on veut compléter $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ en une base $\mathbb{R}^3$.

On connait une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ qui est la base canonique :

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \} \right\}$$

ainsi que la dimension de $\mathbb{R}^3$: $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ce qui va nous simplifier la tâche !
On va donc compléter la famille $\mathcal{L}$ par des éléments de $\mathcal{G}$ en veillant à garder une famille libre jusqu'à obtenir une famille génératrice. Ici, connaissant la dimension, on va donc compléter jusqu'à obtention d'une famille libre de cardinal 3.
Par exemple, on constate que

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

est une famille libre de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

■ **Exemple 27 :**

On souhaite compléter la famille $\mathcal{L} = (3, 1+X, X+X^2)$ en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Pour commencer, $\mathcal{L}$ est libre par famille de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts.
L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$ de dimension 5 admet comme famille génératrice $\mathcal{G} = (1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$.
On peut donc avec les mêmes arguments que tout à l'heure la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$:

$$= (3, 1+X, X+X^2, X^3, X^4, X^5)$$

IV Coordonnées

IV-1 Unicité de la décomposition dans une base

Théorème *de décomposition dans une base*

Démonstration :
• Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Supposons qu'il existe un élément $u \in E$ ayant deux décompositions $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ et $u = \alpha'_1 e_1 + \ldots + \alpha'_n e_n$.
Ainsi, en soustrayant les deux égalités, on obtient

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n - \alpha'_n)e_n = 0_E$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant libre, on obtient par définition

$$\alpha_1 - \alpha'_1 = \ldots = \alpha_n - \alpha'_n = 0$$

• Supposons que toute décomposition est unique. Montrons que la famille est libre :

Supposons qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0_E$$

Par unicité de la décomposition, comme $0_E = 0e_1 + \ldots + 0e_n$, on obtient

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

□

? Exercice 7

D'après l'exercice précédent, on sait que $\mathcal{B} = \{(1,3,-1), (2,1,i), (1,0,0)\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$. Déterminer l'unique décomposition de $(0, 4, -1+i)$ dans cette base $\mathcal{B}$.

? Exercice 8

Montrer que la famille de polynomes $\{3+X, X, X^2+1\}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$ et déterminer l'unique décomposition de 1 dans $1 + X - 2X^2$ dans cette base.

Soient $P = a + bX + cX^2$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Alors

$$P = \alpha(3+X) + \beta X + \gamma(1+X^2) \underset{\text{par identification}}{\Leftrightarrow} P = (3\alpha+\gamma) + (\alpha+\beta)X + \gamma X^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3\alpha + \gamma \\ b = \alpha + \beta \\ c = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(a-c) \\ \beta = \frac{1}{3}(a-c) - b \\ \gamma = c \end{cases}$$

Il existe donc une seule et unique solution à la décomposition de P pour tout P. La famille $\{3+X, X, X^2+1\}$ est donc une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
De plus, la décomposition de $1 + X - 2X^2$ est obtenue directement avec les coefficients $a = b = 1,\ c = -2$ ci-dessus :

$$1 + X - 2X^2 = 1 \cdot (3+X) - 0 \cdot X - 2 \cdot (X^2+1)$$

Remarque :

Si la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ n'est pas libre, la décomposition n'est pas unique. *(cf. exemple ci-dessous.)*

Exemple 28 :

Supposons que $e_1 = (1,0,2)$, $e_2 = (1,1,1)$ et $e_3 = (0,-1,1)$. **La famille n'est pas libre** car

$$e_3 = e_1 - e_2$$

On a alors par exemple

$$e_1 + e_2 + e_3 = (2,0,4) = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

La décomposition n'est donc pas unique.

Remarque :

Si la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ n'est pas génératrice de l'espace E, la décomposition de $x \in E$ n'est pas toujours possible. *(cf. exemple ci-dessous.)*

Exemple 29 :

Supposons que $e_1 = (1,0,2)$, $e_2 = (1,1,1)$. **La famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.** ...
Le vecteur $x = (1,0,0)$ ne se décompose pas grâce à e_1 et e_2.

En effet, supposons qu'une décomposition existe :

$$(1,0,0) = \alpha(1,0,2) + \beta(1,1,1)$$

La décomposition n'existe donc pas.

IV-2 Notion de coordonnées

Notation :

Si E est un espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, tout vecteur $u \in E$ admet une unique décomposition dans la base $\mathcal{B}$: $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.
Pour des raisons de lourdeur d'écriture, on préfère généralement se débarrasser des notations $e_1, \dots, e_n$. On écrit alors à la place :

$$\dots$$

Exemples :

30 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ (base de $\mathbb{R}^3$), alors

$$(2,1,-1)_{\mathcal{B}} = \dots$$

31 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X-1, X^2)$ deux bases de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$(2,-3,2)_{\mathcal{B}} = 2 - 3X + 2X^2 = -1 \cdot 1 - 3 \cdot (X-1) + 2 \cdot X^2 = (-1,-3,2)_{\mathcal{B}'}$$

Commentaires :

Ceci amène également à la définition suivante, qui nous permet de nous ramener à $\mathbb{K}^n$ et qui nous sera bien utile dans les futures formules matricielles :

Définition

Notation :

Dans le même cadre, il arrive souvent de voir également le vecteur en ligne :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \text{au lieu de} \quad M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Néanmoins
> seule **l'écriture en colonne** sera utilisée dans les calculs matriciels à venir.

Remarque :

$M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbb{K}^n$ et $u \in E$. Généralement, (sauf si $E = \mathbb{K}^n$ et que $\mathcal{B}$ est la base canonique), on a donc

$$M_{\mathcal{B}}(u) \neq u$$

Ce sont donc **deux objets différents** à différencier avec précaution dans les calculs.

■ Exemples :

32 ■ Dans $\mathbb{K}^3$, on note $\mathcal{B} = ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ (base de $\mathbb{K}^3$), alors si

$$M_{\mathcal{B}}(u) = (2,1,-1)$$

on a $\quad u = 2\cdot(1,1,0) + 1\cdot(0,1,1) - 1\cdot(1,0,1) = (1,3,0)$

On voit bien que

$$u \neq M_{\mathcal{B}}(u)$$

33 ■ Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X-1, X^2)$ deux bases de $\mathbb{R}_3[X]$. Si

$$M_{\mathcal{B}}(u) = (2,-3,2)$$

alors

$$u = 2 - 3X + 2X^2 = -1\cdot 1 - 3\cdot(X-1) + 2\cdot X^2$$

d'où

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = (-1,-3,2)$$

Là encore, $u \neq M_{\mathcal{B}}(u)$, $u \neq M_{\mathcal{B}'}(u)$ et en toute logique $M_{\mathcal{B}}(u) \neq M_{\mathcal{B}'}(u)$.

IV-3 Changement de base

On se donne deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ et on suppose ici que l'on dispose des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$M_{\mathcal{B}}(e'_k) = (\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{n,k}) \qquad \forall k = 1, \ldots, n$$

■ Exemple 34 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les bases

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}' = \big(\underbrace{1}_{e'_1}, \underbrace{X-1}_{e'_2}, \underbrace{(X-1)(X-2)}_{e'_3}\big)$$

où on a alors

$$M_{\mathcal{B}}(e'_1) = \ \ldots \qquad , \quad M_{\mathcal{B}}(e'_2) = \ \ldots \qquad , \quad M_{\mathcal{B}}(e'_3) = \ \ldots$$

On se pose la question suivante :
Ayant les coordonnées d'un vecteur u dans l'une des deux bases, comment trouver les coordonnées de u dans l'autre ?

IV.3-a) Si on a les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$ et on veut $M_{\mathcal{B}}(u)$

i.e. on a $u = \mu_1 e'_1 + \ldots + \mu_n e'_n$ et on cherche $u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$:

Méthode $n°\,1$: On développe :

On connait $M_{\mathcal{B}'}(u) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Alors

$$u = \mu_1 e'_1 + \ldots + \mu_n e'_n = \mu_1(\text{expression de } e'_1 \text{ en fonction des } e_i) + \ldots$$

■ Exemple 35 :

Dans les mêmes bases que dans l'exemple précédent, on cherche les coordonnées du polynôme T tel que $M_{\mathcal{B}'}(T) = (2,0,1)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$, c'est-à-dire les coefficients α, β, γ tels que

$$T = \alpha e_1 + \beta e_1 + \gamma e_3 = \alpha + \beta X + \gamma X^2$$

On a

$T = \ \ldots$

D'où

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \ \ldots$$

Méthode $n°\,2$: Calcul matriciel

On écrit la matrice composée de l'ensemble des coordonnées de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \ldots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

■ Exemple 36 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note encore $\mathcal{B}$ la base canonique $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ et :

$$\mathcal{B}'=\big(\underbrace{1}_{e'_1},\underbrace{X-1}_{e'_2},\underbrace{(X-1)(X-2)}_{e'_3}\big).\quad \text{alors}\quad M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

Toujours avec $M_{\mathcal{B}'}(T)=(2,0,1)$, on a $T=2e'_1+0e'_2+1e'_3$. Matriciellement, ceci donne

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(T) &= 2M_{\mathcal{B}'}(e'_1)+0M_{\mathcal{B}'}(e'_2)+1M_{\mathcal{B}'}(e'_3) \\ &= \dots \end{aligned}$$

On observe alors ci-dessus ici pour résumer que :

$$M_{\mathcal{B}}(T)=\ \dots$$

Ce principe se généralise en fait à tous les cas possibles :

Définition

Étant données deux bases $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ telles que

$$e'_k=(\alpha_{1,k},\dots,\alpha_{n,k})_{\mathcal{B}}\qquad \forall k=1,\dots,n$$

on note

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e'_1 & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

qu'on appelle *matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*.

Théorème *(Formule de changement de base)*

avec $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ inversible.

Démonstration :

Réécrire l'exemple ci-dessus avec des valeurs générales ! L'inversibilité sera justifiée à la fin du chapitre. □

■ Exemple 37 :

Si $\mathcal{B}'=\{(1,0,2),(0,1,1),(1,-1,0)\}$ et $u=(-1,0,1)_{\mathcal{B}'}$, alors les coordonnées de u dans la base canonique sont :

IV.3-b) Si on a les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et on veut $M_{\mathcal{B}'}(u)$

i.e. on a $u=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n$ et on cherche $u=\mu_1e'_1+\dots+\mu_ne'_n$:

■ Exemple 38 :

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, avec toujours $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ et : $\mathcal{B}'=\big(\underbrace{1}_{e'_1},\underbrace{X-1}_{e'_2},\underbrace{(X-1)(X-2)}_{e'_3}\big)$, on cherche les coordonnées du polynôme $T=X^2-3X+4$ dans la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire les coefficients α,β,γ tels que

$$T=\alpha e'_1+\beta e'_1+\gamma e'_3=\alpha+\beta(X-1)+\gamma(X-1)(X-2)$$

Méthode n° 1 : Par résolution de système

On développe l'expression de droite, et on résoud les équations obtenues pour trouver les coefficients μ_i.

■ Exemple 39 :

Dans l'exemple précédent, on a

$$X^2-3X+4=(\alpha-\beta+2\gamma)+X(\beta-3\gamma)+\gamma X^2$$

La famille $(1,X,X^2)$ étant libre, il y a unicité des coefficients et on peut identifier :

$$\begin{cases} 1 &= \gamma \\ -3 &= \beta-3\gamma \\ 4 &= \alpha-\beta+2\gamma \end{cases}\quad \Leftrightarrow \text{résolution}\dots\quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 2 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 1 \end{cases}$$

Méthode n° 1 : Par inversion de matrice

On a vu tout à l'heure que $M_{\mathcal{B}}(u)=M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')M_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors

$$M_{\mathcal{B}'}(u)=M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1}M_{\mathcal{B}}(u)$$

En effet, si on note $P = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, comme elle est inversible, en multipliant à gauche par P^{-1} l'égalité $M_{\mathcal{B}}(u) = PM_{\mathcal{B}'}(u)$, on obtient ce qui est dit dans la méthode.

■ Exemple 40 :

On considère la base de $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{B}' = \big(1, X-1, (X-1)(X-2)\big)$. On cherche les coordonnées du polynôme $X^2 - 3X + 4$ dans cette base.

IV.3-c) Propriétés des matrices de passage

Pour commencer, on peut remarquer que les passages de bases s'enchaînent telle une relation de Chasles (ceci sera ssimplement dans le cadre des applications linéaires) :

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, avec $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ trois bases de E. Alors

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})M_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \ \ldots$$

Démonstration : admise. □

Commentaires :

En bref : passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ puis de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$ revient à passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{D}$.

Corollaire

Étant donné un espace vectoriel E et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice de passage $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est inversible et on a

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1} = \ \ldots$$

Démonstration :

D'après la proposition, on a $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = Id$ *(à méditer !)*
De même, $M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = Id$. CQFD □