Chapitre 9

Variables aléatoires discrètes

I Généralités

I-1 Définition

Définition

On appelle *variable aléatoire réelle discrète* toute variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $Supp(X)$ soit indexé par un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

Remarque :

être indexé par un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ signifie simplement que l'on peut "étiqueter" les valeurs de $Supp(X)$ avec des valeurs entières.

■ **Exemple 1 :**

On lance un dé une infinité de fois. L'ensemble Ω des résultats possibles est

$$\Omega = [\![1;6]\!]^{\mathbb{N}}$$

On s'intéresse maintenant au rang d'apparition du premier "6". On pose alors

$$\begin{array}{rccl} X: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \begin{cases} \text{rang d'apparition de 6} & \text{si 6 apparait au moins une fois} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

X est une variable aléatoire discrète car $Supp(X) = \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, et même $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

■ **Exemple 2 :**

On note Ω l'ensemble des tailles possibles d'une plante donnée. On pose

$$\begin{array}{rccl} X: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \frac{(-1)^{\lfloor w \rfloor}}{\lfloor w \rfloor + 1} \end{array}$$

Alors X est une variable aléatoire discrète, car $Supp(X) = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Cet ensemble est indexé par $\mathbb{N}$.

On lance deux dés à 6 faces de manière indépendante et on note S la somme des deux dés. On a alors

$$Supp(S) = [\![2, 12]\!] \subset \mathbb{N}$$

Remarque :

Toute variable finie est discrète.

I-2 Loi d'une v.a.d.

Remarque :

De manière générale, la loi d'une variable aléatoire est caractérisée par sa fonction de répartition. Néanmoins, dans certains cas particuliers, la loi peut être exprimée de manière plus concise. C'est le cas des variables aléatoires discrètes.

Commentaires :

Comme $Supp(X)$ est indexé par un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, il en va de même pour tout $B \subset Supp(X)$. Dans ce cas, $\{(X = k)\}_{k \in B}$ est un système complet d'évévement de B, d'où

$$P(X \in B) = \sum_{k \in B} P(X = k)$$

Pour obtenir une probabilité quelconque, il suffit donc de connaître uniquement l'ensemble des $P(X = k)$.

■ **Exemple 3 :**

Si X est le rang de première apparition du 6 dans une série de lancers indépendants d'un dé, alors la probabilité que le 6 arrive à un rang pair est $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k)$.

Définition

On appelle *loi de la v.a.d. X* l'ensemble noté $\mathcal{L}(X)$ constitué de

- $Supp(X)$;
- l'ensemble des $P(X = k)$ avec $k \in Supp(X)$.

■ **Exemple 4 :**

On s'intéresse encore une fois au rang de première apparition de 6. Avec $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^{\mathbb{N}}$ l'univers de départ, on avait posé

$$\begin{array}{rccl} X: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & w & \mapsto & \begin{cases} \text{rang de première apparition de 6 dans } w \text{ si 6 apparait} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Avec les différents calculs qui ont été faits précédemment, la loi de X peut s'écrire

$$\boxed{\begin{array}{l} X(\Omega) = \mathbb{N}, \\ p(X = n) = \begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{array}} \quad ou \quad \boxed{\begin{array}{l} Supp(X) = \mathbb{N}^*, \\ p(X = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}}$$

Commentaires :

Si on prend maintenant $B = Supp(X)$, $\{(X = k)\}_{k \in Supp(X)}$ est un système quasi-complet d'événement, on a :

$$\boxed{1 = P(X \in Supp(X)) = \sum_{k \in Supp(X)} P(X = k)}$$

On va maintenant voir comment ça se passe "dans l'autre sens" :

Proposition 1

Etant donné un sous-ensemble I de $\mathbb{N}$, pour toute suite $(p_i)_{i \in I}$ et toute suite $(x_i)_{i \in I}$ de réels, telles que
$$\begin{cases} p_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I \\ \sum_{i \in I} p_i \quad \text{converge et de somme totale } 1 \end{cases}$$

Alors il existe une variable aléatoire X telle que

$$\begin{cases} Supp(X) = \{x_i \mid i \in I\} \\ p(X = x_i) = p_i \qquad \forall i \in I \end{cases}$$

Démonstration : admise. □

■ **Exemple 5** :

On pose $p_i = \frac{1}{2^i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une variable aléatoire X telle que

$$P\left(X = \frac{(-1)^n}{e^n}\right) = \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

En effet, on a :

- $\frac{1}{2^i} \geqslant 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
- $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^i}$ qui est une série géométrique convergente, de somme totale
$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Confusion

Si X et Y ont même loi, elles ne prennent pas forcément la même valeur en même temps.

■ **Exemple 6** :

On note X et Y les résultats des lancers de deux dés équilibrés distincts. X et Y ont même loi, mais n'ont pas toujours même valeur. (On sait bien par expérience que les doubles ne sont pas systématiques !)

I-3 Fonction de répartition

Voyons maintenant que la donnée de la fonction de répartition et de ladite "loi" précédente d'une variable aléatoire sont équivalentes. Rappelons pour commencer la définition d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire :

Définition

Étant donnée une variable aléatoire X, on appelle *fonction de répartition* de X la fonction
$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ t & \mapsto & P(X \leqslant t) \end{array}$$

■ **Exemple 7** :

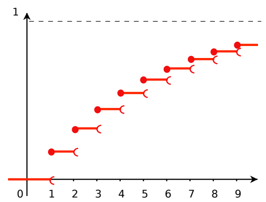
Reprenons l'exemple de première apparition de 6 dans un jeté infini de dé équilibré. La loi de X est résumée par :
$$Supp(X) = \mathbb{N}^* \quad \text{et } P(X = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- si $t < 1$, comme $Supp(X) \subset [1 + \infty[$, on a $F_X(t) = P(X \leqslant t) = 0$
- Si $t \geq 1$, $$F_X(t) = p(X \leqslant t) = P(\bigcup_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} (X = k)) = \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} P(X = k)$$

D'où
$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &\underbrace{=}_{j=k-1} \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} \left(\frac{5}{6}\right)^j = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - (\frac{5}{6})^{\lfloor t \rfloor}}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\lfloor t \rfloor} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$



On observe que la fonction est "en escalier". C'est le cas de manière générale dans le cadre des v.a.d. :

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors sa fonction de répartition F_X est constante sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$ tels que $Supp(X) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec $x_i < x_{i+1}$ pour tout i.

Démonstration :

Soient $x, y \in [x_i, x_{i+1}[$. Quitte à échanger x et y, on peut supposer $x < y$. On a

Or,
$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leqslant x) &= P(X \leqslant x) + P(x < X \leqslant y) \\ 0 \leqslant P(x < X \leqslant y) &\leqslant P(x_i < X < x_{i+1}) = 0 \end{aligned}$$

D'où $F(x) = P(X \leqslant y) = F(y)$. $\square$

Voyons maintenant ce que signifient les points de discontinuité :

Remarque :

Soit F_X la fonction de répartition d'une v.a.d. X. Alors,

$$p(X = t) = p(X \leqslant t) - p(X < t)$$

Ce qui veut dire que :

$p(X = t) \neq 0$ si et seulement si t est un point de discontinuité de F_X

et

$p(X = t)$ est la "hauteur" de la discontinuité de la fonction de répartition en t.

De la remarque précédente, on tire :

Propriété 3

Soit F une fonction de répartition d'une variable X, constante entre ses points de discontinuité notés D indexés par un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Alors

$$Supp(X) = D$$

et X est une variable discrète.

Démonstration :

Le résultat $D \subset Supp(X)$ est immédiat d'après la remarque précédente.

Afin de ne pas faire appel à de la technicité inutile, on se contera de constater ici, que comme la fonction est constante sur chaque intervalle entre les valeurs de D, on a

$$\sum_{x \in D} P(X = x) = \text{"hauteur totale entre 0 et 1"} = 1$$

et donc $Supp(X) = D$ $\square$

Corollaire

Deux v.a.d. ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.

Démonstration : admise. $\square$

Vous devez savoir passer d'une fonction de répartition à la variable discrète et réciproquement.

II Exemples fondamentaux

Rappel :

Soit $\Omega_0 = \{x_k \mid k \in I \subset \mathbb{N}\}$. On rappelle que la loi de X est entièrement définie si

$$\sum_{k \in I} \underbrace{p(X = x_k)}_{\geqslant 0} = 1$$

Dans ce cas, $Supp(X) = \Omega_0$.

II-1 Rappels de Probabilités finies

II.1-a) Loi uniforme

Définition et Proposition

Soit $N \in \mathbb{N}$, $\Omega_0 = \{x_k \mid k = 1, \ldots, N\}$ un ensemble fini de cardinal N. On dit que X suit une *loi uniforme* sur Ω_0 si

$$Supp(X) = \Omega_0 \quad \textit{et} \quad p(X = x_k) = \frac{1}{N} \qquad \forall k = 1, \ldots, N$$

On écrit

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\Omega_0}}$$

Démonstration :

La suite $(p_k)_{k \in \{1,\ldots,N\}}$ définie par $p_k = p(X = x_k)$ est positive et

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} = N\frac{1}{N} = 1.$$

$\square$

Modélisation : Cette loi modélise la survenue équiprobable de N événements $(X = x_1), \ldots, (X = x_N)$.

■ Exemple 8 :

On lance un dé une fois et on note X le nombre obtenu. Alors X suit une loi uniforme sur l'ensemble $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$.

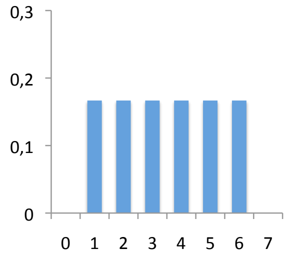
Formule

La loi uniforme est la seule loi pour laquelle on peut affirmer que pour tout A dans $Supp(X)$,

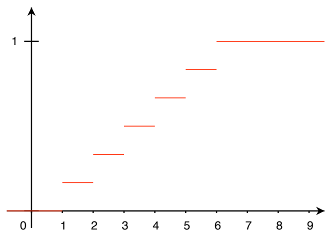
$$p(X \in A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

$\star$ pour $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$:

Diagramme de probabilités :



Fonction de répartition :



II.1-b) Loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$

Dans cette section, on se donne $p \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition et Proposition

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p_k = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre n et p si

$$\underbrace{Supp(X) = \{0, \ldots, n\}}_{\text{redondant}} \quad et \quad p(X=k) = p_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)}$$

Démonstration :

$(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite positive telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_k = 1$. $\square$

Modélisation : Cette loi modélise le nombre de succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli **indépendantes**, où la probabilité de succès à chaque étape est p.

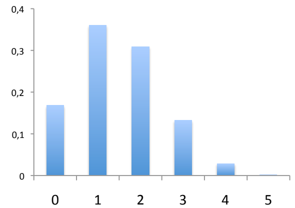
■ Exemple 9 :

On lance n fois un dé et on compte le nombre d'apparition du chiffre 1. Alors X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; \frac{1}{6})$.

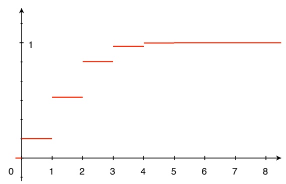
On donne ci-dessous quelques exemples de répartition de lois binomiales :

$\star$ $n = 5$ $p = 0,3$:

Diagramme de probabilités :



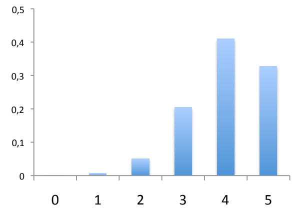
Fonction de répartition :



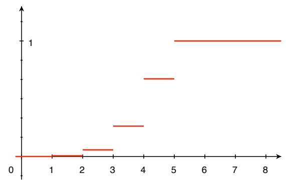
4.

$\star$ $n = 5$ $p = 0,8$:

Diagramme de probabilités :

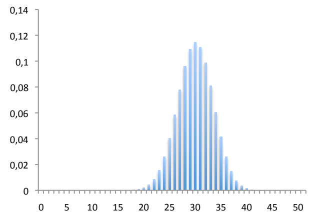


Fonction de répartition :

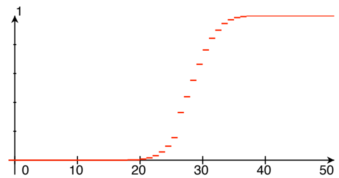


$\star$ $n = 50$ $p = 0,6$:

Diagramme de probabilités :



Fonction de répartition :



II-2 Loi géométrique

Définition et Proposition

Soit $p \in]0;1[$. On dit que X suit une *loi géométrique* sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p si

$$Supp(X) = \mathbb{N}^* \quad et \quad p(X=k) = (1-p)^{k-1} p \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

On note

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p) \quad \text{ou} \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}.$$

Démonstration :

⋆ Tout d'abord, $(1-p)^{k-1}p \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
⋆ Pour vérifier que c'est une mesure de probabilité discrète, il suffit encore de vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p = 1$, ce qui est vrai par somme totale de série géométrique convergente. □

Modélisation : Cette loi modélise le rang de **première apparition** d'un événement de probabilité p dans une suite infinie de tirages **indépendants**.

■ Exemple 10 :

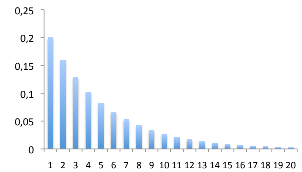
On jette indéfiniement un dé équilibré et on s'intéresse à la première apparition du chiffre 1. À chaque tirage, la probabilité d'apparition de 1 est $p = \frac{1}{6}$. Ainsi, on introduit la variable aléatoire X définie de la manière suivante :

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si 1 n'apparaît jamais.} \\ k & \text{si 1 apparaît au rang } k \text{ pour la première fois.} \end{cases}$$

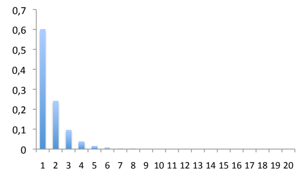
La loi de X est donc $\mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

On donne ci-dessous quelques exemples de diagramme de probabilités de lois géométriques :

$p = 0,2$:



$p = 0,6$:



Propriété 4

Soit $p \in]0;1[$. La fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$ est définie par

$$F(t) = \begin{cases} 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration :

• Si $t < 1$, comme $Supp(X) = \mathbb{N}^*$, il est clair que

$$0 \leqslant F(t) = P(X \leq t) \leqslant P(X < 1) = 0,$$

d'où $F(t) = 0$.

• Si $t \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} F(t) = P(X \leq t) &= P(X \leq \lfloor t \rfloor) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\lfloor t \rfloor}(X=k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} P(X=k) \qquad (\sigma\text{-add.}) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} p(1-p)^{k-1} = p\frac{1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor}}{1-(1-p)} \\ &= 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} \end{aligned}$$

□

Définition et Proposition

Soit $p \in]0;1[$. On pose X et Y deux variables aléatoires telles que

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \text{et} \quad Y = X - 1$$

alors

$$Supp(Y) = \mathbb{N} \quad et \quad P(Y=k) = (1-p)^k p \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

On note $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)}$ et on dit que Y *suit une loi géométrique* sur $\mathbb{N}$ de paramètre p.

Démonstration : exercice. □

Modélisation : Y modélise ici le nombre d'échecs avant l'apparition du premier succès.

Propriété 5 *d'absence de mémoire*

Soit X suivant une loi $\mathcal{G}(p)$. Pour tout $n, m > 0$, on a

$$P_{X>n}(X > n+m) = P(X > m)$$

Commentaires :

On peut interpréter ceci de la manière suivante :
"X ne s'épuise pas."
Si X correspond par exemple au nombre de minutes d'attente avant de réussir à attraper un vendeur dans une boutique, quelqu'un qui déjà attendu n minutes a exactement autant de chance d'attendre encore pendant un temps de m minutes supplémentaires qu'une autre personne qui vient d'arriver. (Il n'y aurait donc pas ici de file d'attente et chaque personne serait servie de manière aléatoire. Oui, c'est particulièrement injuste mais c'est la vie quelquefois !)

II-3 Loi de Poisson

Définition et Proposition

Soit $\lambda \in]0;+\infty[$. On dit que X suit une *loi de Poisson* de paramètres λ si

$$\underbrace{Supp(X) = \mathbb{N}}_{\text{redondant}} \quad et \quad p(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

On note

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)}$$

Démonstration :

Les $p(X=k)$ sont clairement positifs et d'après le cours sur les séries, on sait que $\sum \frac{\lambda^k}{k!}$ est convergente, avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda},$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$$

□

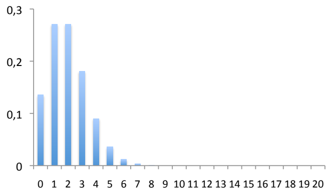
Modélisation : Cette loi modélise généralement une fréquentation.

- **Exemple 11** :

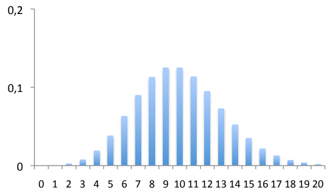
On compte le nombre X de clients à un guichet pendant un laps de temps T. En général, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, où λ est le nombre moyen de client pendant un temps T.

On donne ci-dessous quelques exemples de **diagramme de probabilités** de lois exponentielles :

$\lambda = 2$:



$\lambda = 10$:



Propriété 6

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est définie par

$$F(t) = 1 - \int_0^{\lambda} e^{-u}\frac{u^{\lfloor t \rfloor}}{\lfloor t \rfloor !}\, du$$

Démonstration :

• Montrons par réccurence la formule $F(n) = 1 - \int_0^{\lambda} e^{-u}\frac{u^n}{n!}\, du$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

<u>Initialisation :</u> Soit $n = 0$.

D'une part, $F(0) = P(X=0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$.

D'autre part, on a $\int_0^{\lambda} e^{-u}\frac{u^0}{0!}\, du = \int_0^{\lambda} e^{-u}\, du = \left[-e^{-u}\right]_0^{\lambda} = -e^{-\lambda} + 1 = 1 - F(0)$.

<u>Hérédité :</u> Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle reste vraie pour $n+1$.

On a donc $1 - F(n) = \int_0^{\lambda} e^{-x}\frac{x^n}{n!}\, dx$. L'intégration par partie

$$\begin{array}{ll} u = e^{-x} & u' = -e^{-x} \\ v' = \dfrac{x^n}{n!} & v = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$$

donne alors

$$1 - F(n) = \left[e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} -e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, dx$$

Or,

$$\left[e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^{\lambda} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = P(X = n+1)$$

D'où

$$1 = \underbrace{F(n) + P(X=n+1)}_{F(n+1)} + \int_0^{\lambda} -e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, dx$$

Ce qui donne bien l'égalité attendue

$$F(n+1) = 1 - \int_0^{\lambda} -e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, dx$$

□

Remarque :

Cette fonction de répartition n'est en générale pas utilisée car pour calculer $F(t)$, il faut faire des IPP, ce qui revient à calculer $F(t) = \sum_{k=0}^{[t]} p(X=k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{[t]} \frac{\lambda^k}{k!}$

III Espérance et variance

Notation :

Dans toute cette section, pour des raisons d'écriture, on supposera que X est une variable aléatoire telle que

$$Supp(X) \subset \{x_k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{N},\ \text{avec les } x_k \text{ 2 à 2 distincts.}\}$$

quitte à avoir en réalité un sous-ensemble A d'indices tels que que $p(X = x_k) = 0$ pour tout $k \in A$.

Exemple 12 :

Si X est une variable qui suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 8\}$, on aura $Supp(X) \subset \mathbb{N}$, i.e. $x_i = i \quad \forall i \in \mathbb{N}$, mais avec

$$P(X = x) = 0 \quad \text{si } x = 0 \text{ ou } x \geqslant 9$$

III-1 Espérance

Commentaires :

En mécanique, le barycentre de points pondérés est un point d'équilibre de la structure. De même, pour une v.a.d., on peut définir la notion de barycentre à travers l'espérance.

Définition et Proposition

Si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|\, p(X = x_k)$ converge, on appelle *espérance de X* et on note $\mathbb{E}[X]$ la valeur (bien définie)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k\, p(X = x_k)$$

et cette valeur ne dépend pas de l'ordre des x_k.

`Démonstration` : admise. □

Exemple 13 :

On admet qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'on ait une variable aléatoire X vérifiant

$$P(X = (-1)^{n+1}n) = \frac{\alpha}{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Montrons que $\mathbb{E}[X]$ existe.

- Etude de la série $S = \sum |(-1)^{n+1}n| P(X = (-1)^{n+1}n)$:

On a $S = \alpha \sum \frac{1}{n^2}$, qui est une série convergente *(exo)*, donc $\mathbb{E}[X]$ existe.

- Valeur de $\mathbb{E}[X]$:

On sait alors que

$$E[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n P(X = (-1)^{n+1}n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n \frac{\alpha}{n^3} = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

pour information (HP), on a alors

$$\mathbb{E}[X] = \alpha \frac{\pi^2}{12}$$

Remarque :

Il est **nécessaire de vérifier la convergence absolue,** et ceci pour plusieurs raisons (dont le bon fonctionnement de certaines propriétés) mais surtout, dans un premier temps, **afin que la notion d'espérance soit bien définie de façon unique.** En effet, observons l'exemple suivant :

Soit X une variable aléatoire telle que $Supp(X) = \{\underbrace{(-1)^n n}_{x_n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ ainsi que, (pour $\alpha = \frac{6}{\pi}^2$),

$$P\big(X = (-1)^{n+1}n\big) = \frac{\alpha}{n^2}$$

(on admet que ceci définit bien la loi d'une variable aléatoire.)

Alors d'une part la série des valeurs absolues :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |x_k|\, p(X = x_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} |(-1)^{n+1} n| \frac{1}{n} = \alpha \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$$

est divergente et d'autre part, la série "sans" valeur absolue

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} x_k\, p(X = x_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (-1)^{n+1} n \frac{1}{n} = \alpha \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

est convergente.

On pourrait donc imaginer qu'il existe quand même une "valeur moyenne", sauf qu'il se pose néanmoins un gros problème : la somme totale de cette série dépend de l'odre dans lequel on aditionne les $x_k p(X = x_k)$!

En effet, souvenons-nous que nous avions étudié cette série graphiquement dans le premier chapitre et nous avions constaté qu'en réorganisant l'ordre des termes de la série, nous n'obtenions pas du tout les même sommes totales. On obtiendrait donc **plusieurs valeurs d'espérance possible !** Ce qui est tout à fait impensable.

Commentaires :

> *Un des résultats les plus importants concernant le traitement des espérances est le théorème dit "de transfert" énoncé ci-dessous. Il permet, pour toute v.a.d. $f(X)$, de se ramener à la loi de X au lieu d'avoir à calculer la loi de $f(X)$ (pas toujours simple.)*

Théorème 7 *de transfert*

Soient

- *I un intervalle (ou réunion finie d'intervalles) contenant $Supp(X)$*
- *$g : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $Supp(X)$*

Alors, $\mathbb{E}[g \circ X]$ existe ssi si la série $\sum g(x_k)\, p(X = x_k)$ est absolument convergente. Alors on a

$$\mathbb{E}[g \circ X] = \sum_{k=0}^{+\infty} g(x_k)\, p(X = x_k)$$

Démonstration :

(idée de dém.) On note $Y = g \circ X$. Alors, par composition d'application, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a.d. sur Ω. Par définition, l'espérance de Y existe si la série $\sum_{y \in Supp(Y)} y \cdot p(Y = y)$ cv absolument.

$$\sum_{y \in Supp(Y)} |y| \cdot p(Y = y) = \sum_{y \in Supp(Y)} |y| \cdot \sum_{w \in \Omega, Y(w) = y} p(w) = \sum_{y \in Supp(Y)} \sum_{w \in \Omega, g \circ X(w) = y} |g \circ X(w)| p(w)$$

mais les $X(w)$ sont les x_k. En réorganisant différemment la double somme (dont la convergence est à prouver, ce qui est HP), cette valeur est égale à

$$\sum_{w \in \Omega} |g \circ X(w)| p(w) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{w \in X^{-1}(x_k)} |\underbrace{g \circ X(w)}_{g(x_k)}| p(\{w\}) \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |g(x_k)|\, p(X = x_k)$$

Cette somme est convergente, donc celle de départ l'est aussi et donc $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g \circ X]$ existe. En rétirant les valeurs absolues et en réitérant le raisonnement, on prouve l'égalité des espérances. □

? Exercice 1

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$ et $Y = e^X$. Montrer que $\mathbb{E}[Y]$ existe ssi $p > 1 - e^{-1}$.

Solution

D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}[Y]$ existe ssi la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^n P(X = n)$ converge. Or,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^n P(X = n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^n p(1-p)^{n-1} = ep \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (e(1-p))^{n-1} = ep \sum_{i \in \mathbb{N}} (e(1-p))^i$$

Ainsi, la série converge ssi $|e(1-p)| < 1$, i.e. $e(1-p) < 1$, ce qui revient ensuite à $p > 1 - e^{-1}$.

Propriété 8

Soit X une v.a.d.

- $\mathbb{E}[X]$ existe si et seulement si $\mathbb{E}[|X|]$ existe.
- Si $\mathbb{E}[X]$ est finie, alors $|\,\mathbb{E}[X]\,| \leqslant \mathbb{E}[\,|X|\,]$

Démonstration :

- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue. Ainsi, d'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}[|X|]$ existe

  ssi la série $\sum P(X = x_k)|x_k|$ converge absolument,

  autrement dit,

  ssi la série $\sum P(X = x_k)|x_k|$ converge.

  On constate que c'est exactement la condition d'existence de $\mathbb{E}[X]$.
- Supposons que $\mathbb{E}[X]$ existe. Alors $\mathbb{E}[|X|]$ aussi. De plus, par théorème sur les séries absolument convergentes,

$$|\mathbb{E}[X]| = \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k p(X = x_k) \right| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|\, p(X = x_k) \underbrace{=}_{\text{transfert}} \mathbb{E}[|X|]$$

□

Propriété 9 *Cas particuliers*

Soit X une v.a.d. et $a, b \in \mathbb{R}$ (finis !)

- Si $Supp(X) = \{a\}$ (i.e. $X = a$ $p.s.$), alors $\mathbb{E}[X] = a$.
- Si $Supp(X) \subset [a, b]$, (i.e. $a \leqslant X \leqslant b$ $p.s.$), alors $\mathbb{E}[X]$ existe et $a \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant b$

Démonstration :

- trivial, exercice.
- Ceci est conséquence de la proposition suivante. En effet, les variables aléatoires constantes a et b ont des espérances qui existent. Ainsi, d'après la proposition suivante, on obtiendra

$$\mathbb{E}[a] \leq \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[b].$$

le *iii*) de cette proposition permet de conclure.

□

Exemple 14 :

Soit X une variable de support $\left\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que $E[X]$ existe.

On a $Supp(X) \subset [-1, 1]$. Elle est bornée, donc son espérance existe (et d'ailleurs) $-1 \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant 1$

Propriété 10 *de comparaison de variables positives*

Soient X, Y deux v.a.d. positives définies sur un même espace probabilisé. Alors : Si $X \leqslant Y$ et $E[Y]$ existe, alors $\mathbb{E}[X]$ existe et $0 \leqslant \mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y]$.

Démonstration : admise. □

Théorème 11

Soient X, Y deux v.a.d. définies sur un même espace probabilisé et **admettant une espérance**. *On a :*

A. Linéarité :

(A1) $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
(A2) $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X] \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

B. Monotonie :

(B1) $X \geqslant 0 \implies \mathbb{E}[X] \geqslant 0$
(B2) $X \geqslant Y \implies \mathbb{E}[X] \geqslant \mathbb{E}[Y]$
(B3) X *et* Y *ont même loi* $\implies \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$

Démonstration :

(A1) est admis. (A2) : appliquer le théorème de transfert.
Pour la monotinue, utiliser les propriétés déjà énoncées. □

Définition

On dit qu'une v.a.d. X est *centrée* si son espérance existe et $\mathbb{E}(X) = 0$.

III-2 Moments

Commentaires :

L'espérance donne une caractéristique moyenne pour une v.a.d.. Avec les moments, on pourra déterminer la dispersion autour de cette moyenne.

Définition

Soit X une v.a.d. et $r \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathbb{E}[\,X^r\,]$ existe, on appelle *moment d'ordre r* la valeur :

$$\mathbb{E}[\,X^r\,].$$

Exemple 15 :

Le moment centré d'ordre 1, s'il existe, est $\mathbb{E}[X]$.

Propriété 12

Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_k^r\, p(X = x_k)$ converge absolument, le moment d'ordre r existe et

$$\mathbb{E}[X^r] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_k^r\, p(X = x_k)$$

Démonstration :
C'est le théorème de transfert appliqué à $g(x) = x^r$. □

Théorème 13

Soient X une v.a.d. et $r \in \mathbb{N}^*$. Si le moment d'ordre r de X existe, alors le moment d'ordre r' existe pour tout $r' \in \{1, \ldots, r\}$.

Démonstration :

Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $r' \in \{1, \ldots, r\}$.
Supposons que $\mathbb{E}[X^r]$ existe, c'est-à-dire que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^r\, p(X = x_k)$ converge.

⋆ Si $|x_k| \geqslant 1$, alors, comme $r' \leqslant r$, on a $|x_k|^{r'} \leqslant |x_k|^r$

⋆ Sinon, si $|x_k| \leqslant 1$, $|x_k|^{r'} \leqslant 1$.

Autrement dit, dans tous les cas, on a que

$$|x_k|^{r'} \leqslant \max(1, |x_k|^r) \leqslant 1 + |x_k|^r$$

d'où

$$|x_k|^{r'}\, p(X = x_k) \leqslant p(X = x_k) + |x_k|^r p(X = x_k)$$

qui sont tous deux des termes généraux de séries convergentes. Par somme de séries convergentes, la série de terme général $p(X = x_k) + |x_k|^r p(X = x_k)$ est convergente, puis, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^{r'}\, p(X = x_k)$ est convergente. □

Remarque :

Dans la propriété, on peut remplacer la v.a.d. X par la v.a.d. $X-a$ pour un réel a fixé, on obtient sous réserve de convergence absolue,

$$\mathbb{E}[(X-a)^r] = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X=x_k)\,(x_k-a)^r.$$

Définition

Soit X une v.a.d. et $r \in \mathbb{R}^*$. Si $\mathbb{E}[\,X^r\,]$ existe, on appelle *moment centré d'ordre r* la valeur *(bien définie : admis).*

$$\mathbb{E}[\,(X-\mathbb{E}[X])^r\,]$$

III-3 Variance

Définition

Soit X une v.a.d.. Si $\mathbb{E}[\,X^2\,]$ existe, le moment centré d'ordre 2 de X existe. On l'appelle *variance* de X. Elle est notée

$$V(X) = \mathbb{E}[\,(X-\mathbb{E}[X])^2\,]$$

La racine carrée de cette valeur, notée

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

est appelée *écart-type* de la variable X.

Définition

Une v.a.d. X est dite *réduite* si sa variance existe et $V(X)=1$.

Vocabulaire : Les v.a.d.

$$X-\mathbb{E}[X] \quad \text{et} \quad \frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$$

sont appelées respectivement variable *centrée* et *centrée réduite* de X.

Théorème 14 *de König-Huyghens*

Soit X une v.a.d.. Si $\mathbb{E}[\,X^2\,]$ existe, on a

$$V(X) = \mathbb{E}[\,(X-\mathbb{E}[X])^2\,] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Démonstration :

Si le moment d'ordre 2 existe, alors $\mathbb{E}[X]$ existe également. Le reste n'est qu'un petit calcul simple.

$$V(X) = \mathbb{E}[\,(X-\mathbb{E}[X])^2\,] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

□

Propriété 15

Soient X une v.a.d. admetant un moment d'ordre 2, et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a

- X est constante (en loi) si et seulement si $V(X)=0$.
- $V(aX) = a^2\,V(X)$.
- $V(X+b) = V(X)$.

Démonstration :

- ⋆ Supposons que X est constante, par exemple $X=\alpha$. Alors $\mathbb{E}[X]=\alpha$. D'où

  $$V(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}(0) = 0$$

  ⋆ Supposons que $V(X)=0$. Notons $Y = X-\mathbb{E}[X]$. Montrons que Y est nulle, ce qui montrera que $X=\mathbb{E}[X]$, c'est=à=dire que X est constante.

  Notons $P_Y = \sum p_k \delta_{x_k}$ la loi de Y. Par hypothèse, $\mathbb{E}[Y^2]$ existe et vaut 0, c'est-à-dire que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k^2$ converge de somme 0.

  C'est une série de terme positif, tous les termes sont donc nuls, i.e. la seule valeur possible de Y est 0.
- On sait que $X-\mathbb{E}[X]$ admet un moment d'ordre 2. En multipliant par une constante, on ne change pas cet état de fait. Or, d'une part,

  $$\mathbb{E}\big[a^2(X-\mathbb{E}[X])^2\big] = a^2\mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])^2\big] = a^2V(X)$$

  et d'autre part,

  $\mathbb{E}\big[a^2(X-\mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}\big[(aX-a\mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}\big[(aX-\mathbb{E}[aX])^2\big] = V(aX)$
- *exercice*

□

III-4 Exemples fondamentaux

Dans cette section, on récapitule les données obtenues sur les exemples classiques de loi finies et disccrètes.

III.4-a) Loi uniforme discrète

On se donne X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{a, a+1, \dots, b\}$, où $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leqslant b$.

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= \frac{b+a}{2} \\ V(X) &= \frac{n^2-1}{12} \qquad \text{où } n = b-a+1 \quad \color{red}{(HP)} \end{aligned}}$$

$$\underbrace{\underset{a}{\bullet} \quad \underset{a+1}{\bullet} \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet \quad \underset{b}{\bullet}}_{n}$$

Cas particulier,

$\star$ si $a = 1$, $b = n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$\star$ si $a = 0$, $b = n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$E(X) = \frac{n}{2}$$

III.4-b) Loi de Bernoulli, $\mathcal{B}(p)$

On se donne X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a

$$P(X=0) = q \quad \text{et} \quad P(X=1) = p, \qquad \text{où } q = 1-p$$

D'où

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= p \\ V(X) &= pq \end{aligned}}$$

III.4-c) Loi Binomiale, $\mathcal{B}(n; p)$

On se donne X une variable aléatoire suivant une loi Binomiale de paramètre n, p (à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$.) On a

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\} \qquad \text{où } q = 1-p$$

D'où

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= np \\ V(X) &= npq \end{aligned}}$$

III.4-d) Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}$

On se donne X une variable aléatoire suivant une **loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$)** de paramètre $p \in]0;1[$, c'est-à-dire que

$$p(X=k) = (1-p)^{k-1} p \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

On a

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} \\ V(X) &= \frac{q}{p^2} \qquad \text{où } q = 1-p \end{aligned}}$$

`Démonstration :`

On note ici $q = 1-p$.

• Espérance :

$\star$ Convergence absolue de $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} kP(X=k) = p \sum_{k \in \mathbb{N}^*} kq^{k-1}$:

Tous les termes de la série sont positifs, la convergence absolue revient donc à la convergence.

$\star$ Convergence et somme totale : On reconnait, à la constante p près le terme général de la "série géométrique dérivée" de raison q, avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}.$$

On obtient donc l'existence de l'éspérance, avec

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} p = \frac{1}{p}$$

• Moment d'ordre 2 :

Méthode 1 :

$\star$ Convergence absolue de $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^2 P(X=k) = p \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^2 q^{k-1}$:

Tous les termes de la série sont positifs, la convergence absolue revient donc à la convergence.

$\star$ Convergence et somme totale : Observons que, comme $q \neq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k \geqslant 1} k^2 q^{k-1} &= \sum_{k \geqslant 1} k(k-1+1) q^{k-1} \\ &= q \sum_{k \geqslant 1} k(k-1) q^{k-2} + \sum_{k \geqslant 1} kq^{k-1} \end{aligned}$$

Où on reconnait deux séries géométrique "dérivée seconde" et "géométrique dérivée" convergentes et dont on connait les sommes totales. Alors la série converge (et donc l'espérance existe) et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1} \\
&= \underbrace{pq\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}}_{=\frac{2}{(1-q)^3}} + \underbrace{p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}}_{\frac{1}{1-q}^2} \\
&= p\frac{2q}{(1-q)^3} + p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2q+1-q}{(1-q)^3} = \frac{q+1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}$$

Méthode 2 :

Vérifions l'existence de $\mathbb{E}[X(X-1)]$:

$\mathbb{E}[X(X-1)]$ existe ssi la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(k-1)p(X=k)$ converge absolument. Tous les termes de la série sont positifs, la convergence absolue revient donc à la convergence.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)p(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)p(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p)\sum_{k=2}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2}
\end{aligned}$$

Or, comme $|1-p| < 1$, cette série converge. Ainsi, $\mathbb{E}[X(X-1)]$ existe et vaut

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p(X=k) = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^2} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

De plus, on a

$$X^2 = X(X-1) + X$$

L'espérance de $X(X-1)$ et celle de X existent, ainsi, celle de X^2 existe également et de plus, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

• Variance : X admet un moment d'ordre 2 et d'après la formule de Koenig-Huyghens, on a

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

□

Si maintenant X est une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\boxed{\text{sur } \mathbb{N}}$ de paramètre $p \in]0;1[$, i.e.

$$P(X=k)(1-p)^k p \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p} \\ V(X) &= \frac{q}{p^2} \qquad\qquad \text{où } q = 1-p \end{aligned}}$$

Démonstration :

On pose $Y = X+1$. Alors $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, d'où

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$$

et

$$V(X) = V(Y)$$

□

III.4-e) Loi de Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$

On se donne X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0;+\infty[$. On a

$$p(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

D'où

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= \lambda \\ V(X) &= \lambda \end{aligned}}$$

Démonstration :

⋆ Convergence absolue de $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$:

Tous les termes de la série sont positifs, la convergence absolue revient donc à la convergence.

⋆ Convergence et somme totale : $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}$

On reconnait une série exponentielle de paramètre λ, avec $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$

On obtient donc l'existence de l'éspérance, avec

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

• Moment d'ordre 2 :

⋆ Convergence absolue de $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$:

Tous les termes de la série sont positifs, la convergence absolue revient donc à la convergence.

⋆ Convergence et somme totale :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\,\frac{\lambda^k}{k!} &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2\,\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(k-1+1)\,\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(k-1)\,\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\,\frac{\lambda^k}{k!}\end{aligned}$$

On reconnait, à l'extrême droite, la série déjà étudiée ci-dessus, on sait donc que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^\lambda$$

De plus,

$$\sum_{k\in^*} k(k-1)\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Là encore, on reconnait une série exponentielle, avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^\lambda$$

On obtient donc l'existence de l'éspérance de X^2, avec

$$\mathbb{E}[X^2] = \lambda + \lambda^2$$

• Variance :
X admet un moment d'ordre 2 et d'après la formule de Koenig-Huyghens, on a

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

□